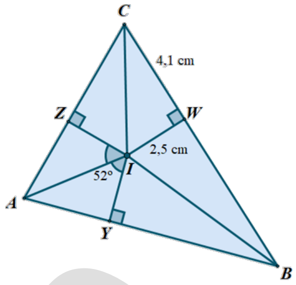
1.



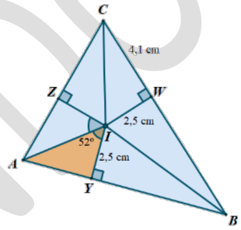
1.1. $I\hat{A}Y = 180^{\circ} - 90^{\circ} - 52^{\circ} = 38^{\circ}$

1.2. Como o ponto I é o incentro do triângulo $[ABC]$,os triângulos $[AIZ]$ e $[AYI]$ são geometricamente iguais, logo, $Z\hat{I}A = I\hat{A}Y = 52^{\circ}$.

1.3. $\overline{ZI} = \overline{YI} = \overline{WI} = 2{,}5\ \text{cm}$

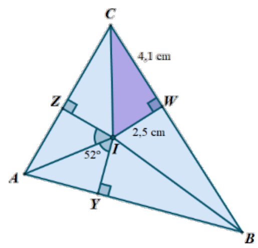
1.4. Como o ponto I é o incentro do triângulo $[ABC]$,os triângulos $[CZI]$ e $[CWI]$ são geometricamente iguais, logo, $\overline{ZC} = \overline{CW} = 4{,}1\ \text{cm}$.

1.5. $Perímetro = 2\pi \times r = 2\pi \times 2{,}5 = 5\pi\ \text{cm}$



1.6. Aplicando trigonometria no triângulo retângulo $[AIY]$, vem:

$\cos(52^{\circ}) = \dfrac{\overline{IY}}{\overline{AI}} \Leftrightarrow \cos(52^{\circ}) = \dfrac{2{,}5}{\overline{AI}} \Leftrightarrow \overline{AI} = \dfrac{2{,}5}{\cos(52^{\circ})}$, logo, $\overline{AI} \approx 4{,}1\ \text{cm}$



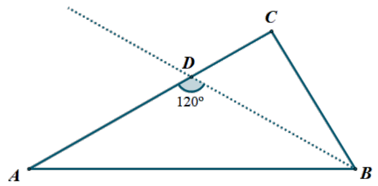
1.7. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $[CIW]$, vem:

$$\overline{CI}^2 = 2{,}5^2 + 4{,}1^2 \Leftrightarrow \overline{CI}^2 = 6{,}25 + 16{,}81 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{CI}^2 = 23{,}06 \Leftrightarrow \overline{CI} = \pm\sqrt{23{,}06}$$

Como se trata de um comprimento, $\overline{CI} > 0$, logo $\overline{CI} = \sqrt{23{,}06} \approx 4{,}8\ \text{cm}$.

2.

2.1. Uma vez que $\overline{AD} = \overline{DB}$ e $\overline{AD} \neq \overline{AB}$, quanto aos lados o triângulo é isósceles não equilátero e como tem um ângulo com amplitude superior a 90° , quanto aos ângulos é obtusângulo.

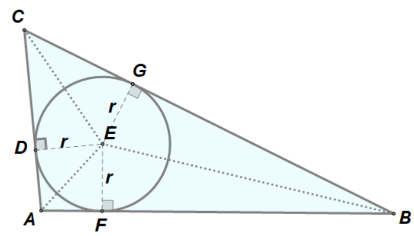


2.2. $D\hat{B}A = (180^{\circ} - 120^{\circ}) : 2 = 30^{\circ}$

Como $\dot{B}D$ é a bissetriz do ângulo CBA , $C\hat{B}D = D\hat{B}A = 30^{\circ}$.

Como $B\hat{D}C = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$, vem que $D\hat{C}B = 180^{\circ} - 60^{\circ} - 30^{\circ} = 90^{\circ}$

3.



3.1. Uma vez que se trata do centro da circunferência inscrita no triângulo, o ponto E é o incentro do triângulo.

3.2. Sejam F e G as projeções ortogonais do ponto E nos lados $[AB]$ e $[BC]$, respetivamente.

Assim, $\overline{EF} = \overline{EG} = \overline{DE} = r$, sendo r o raio da circunferência.

$$Área_{[ABC]} = Área_{[ABE]} + Área_{[BCE]} + Área_{[CAE]} =$$

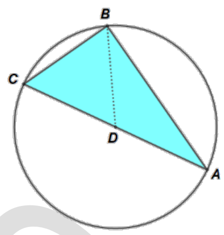
$$= \frac{\overline{AB} \times \overline{EF}}{2} + \frac{\overline{BC} \times \overline{EG}}{2} + \frac{\overline{AC} \times \overline{DE}}{2} = \frac{\overline{AB} \times r}{2} + \frac{\overline{BC} \times r}{2} + \frac{\overline{AC} \times r}{2} =$$

$$= \frac{\overline{AB} \times r + \overline{BC} \times r + \overline{AC} \times r}{2} = \frac{\left(\overbrace{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}^{Perímetro}\right) \times r}{2} = \frac{35 \times r}{2}$$

Assim, $Área_{[ABC]} = \dfrac{35 \times r}{2}$, logo, $45 = \dfrac{35 \times r}{2} \Leftrightarrow 90 = 35 \times r \Leftrightarrow \dfrac{90}{35} = r \Leftrightarrow r = \dfrac{18}{7}$

3.3. $Perímetro = 2\pi \times \frac{18}{7} = \frac{36\pi}{7}$ cm

4.



4.1.

4.1.1. O ponto D é o Circuncentro.

4.1.2. O ponto B é o Ortocentro.

4.2.

- O ângulo CBA é um ângulo reto por se tratar de um ângulo inscrito numa semicircunferência, logo, quanto aos ângulos, o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo. Uma vez que os três lados do triângulo são diferentes, o triângulo $[ABC]$, quanto aos lados, é escaleno.
- Uma vez que $\overline{CB} = \overline{CD} = \overline{DB}$, o triângulo $[CDB]$, quanto aos lados, é equilátero e, quanto aos ângulos, é acutângulo.
- $\overline{DA} = \overline{DB}$ e o ângulo BDA é obtuso, logo, quanto aos lados, o triângulo $[DAB]$ é isósceles (não equilátero) e, quanto aos ângulos, é obtusângulo.

4.3. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $[ABC]$ vem que:

$\overline{CA}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{BA}^2 \Leftrightarrow 16^2 = 8^2 + \overline{BA}^2 \Leftrightarrow 256 - 64 = \overline{BA}^2 \Leftrightarrow \overline{BA}^2 = 192 \Leftrightarrow \overline{BA} = \pm\sqrt{192}$

Como se trata de um comprimento, $\overline{BA} > 0$, logo $\overline{BA} = \sqrt{192}$

Assim, $Perímetro_{[ABC]} = 8 + 16 + \sqrt{192} = 24 + \sqrt{192}$ cm

5.

5.1.

- $[AEC]$

  Uma vez que a reta DE é a mediatriz de $[AC]$, sabemos que $\overline{EA} = \overline{EC}$ e, como $\overline{EA} \neq \overline{AC}$, quanto aos lados o triângulo é isósceles (não equilátero). Como todos os ângulos internos do triângulo são agudos, quanto aos ângulos o triângulo é acutângulo.

- $[AFC]$

  O ângulo ACF é um ângulo reto por se tratar de um ângulo inscrito numa semicircunferência, logo, quanto aos ângulos, o triângulo $[AFC]$ é um triângulo retângulo. Uma vez que os três lados do triângulo são diferentes, o triângulo, quanto aos lados, é escaleno.

5.2. O ponto B é o circuncentro do triângulo $[AEC]$.

5.3. Como o triângulo $[ABC]$ é equilátero e tem perímetro igual a 24 cm, sabemos então que $\overline{AB} = 24 : 3 = 8$ cm, logo, $Perímetro = 2\pi \times 8 = 16\pi$ cm.

6.

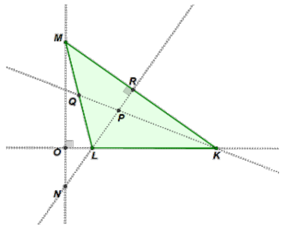
6.1. O ponto H é o circuncentro e o ponto I é o ortocentro.

6.2. A circunferência referida é a circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$. $Perímetro = 2\pi \times 8 = 16\pi$ cm

6.3.

$$Área_{[ABC]} = 68 \Leftrightarrow \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} = 68 \Leftrightarrow \overline{AC} \times \overline{BD} = 68 \times 2 \Leftrightarrow \overline{AC} \times \overline{BD} = 136 \text{ cm}^2$$

7.



7.1. Uma vez que as retas MN e RN são duas das retas suporte das alturas do triângulo, o ortocentro é o ponto N.

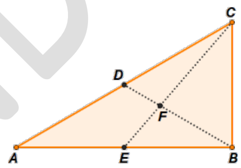
7.2. O segmento $[KQ]$ é uma mediana do triângulo.

7.3. $Área_{[QLK]} = \dfrac{Área_{[LKM]}}{2} = \dfrac{26}{2} = 13\text{ cm}^2$

7.4. $Área_{[LKM]} = 26 \Leftrightarrow \dfrac{\overline{MO} \times \overline{LK}}{2} = 26 \Leftrightarrow \dfrac{6,6 \times \overline{LK}}{2} = 26 \Leftrightarrow 6,6 \times \overline{LK} = 52 \Leftrightarrow \overline{LK} = \dfrac{52}{6,6}$

$\overline{LK} \approx 7,9\text{ cm}$

8.



8.1. Os segmentos de reta $[EC]$ e $[BD]$ são medianas do triângulo.

8.2. Uma vez que $\overline{AD} = \overline{DB}$ e $\overline{AD} \neq \overline{AB}$, o triângulo $[ADB]$, quanto aos lados, é isósceles não equilátero.

Como $A\hat{D}B = 120^{\text{o}}$, o triângulo, quanto aos ângulos, é obtusângulo.

8.3. Uma vez que o triângulo é retângulo, o seu circuncentro é o ponto médio da hipotenusa, ou seja, é o ponto D.
Uma vez que o triângulo é retângulo, o seu ortocentro é o vértice do ângulo reto, ou seja, é o ponto B.
O baricentro é a interseção das medianas do triângulo, logo é o ponto F.

8.4.

8.4.1. As áreas dos triângulos $[EFB]$ e $[DFC]$ são iguais.

8.4.2. $Área_{[BCF]} = 2 \times Área_{[EFB]}$

8.5. $Área_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2}$

Como o triângulo $[BCD]$ é equilátero e tem 12 cm de perímetro, $\overline{DC} = \overline{BC} = 4\text{ cm}$.

Sendo D o ponto médio de $[AC]$, $\overline{AC} = 2 \times 4 = 8\text{ cm}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $[ABC]$, vem:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 8^2 = \overline{AB}^2 + 4^2 \Leftrightarrow 64 = \overline{AB}^2 + 16 \Leftrightarrow 64 - 16 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 48 \Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{48}$

Como se trata de um comprimento, $\overline{AB} > 0$, logo $\overline{AB} = \sqrt{48}$

Assim, $Área_{[ABC]} = \dfrac{\sqrt{48} \times 4}{2} = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{16} \times 4}{2} = 8\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

8.6. A circunferência circunscrita ao triângulo tem raio igual a $\overline{DC}$, ou seja, 4 cm, logo o seu perímetro é $2\pi \times 4 = 8\pi\text{ cm}$.

8.7. $\overline{FC} = 2 \times \overline{EF} = 2 \times 2,5 = 5\text{ cm}$