PROVA MODELO - MATEMÁTICA A

Matematicando (www.amatoso.org)

Ensino Secundário | 2025

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.
As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

MATEMATICANDO

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

✱ **1.** Sabe-se que após a toma do comprimido TIRADOR, a concentração desse medicamento no sangue diminuiu 30% por hora.

Admitindo que a concentração inicial é de 120 mg/l, qual é o número inteiro mínimo de horas ao fim do qual a concentração será inferior a 20 mg/l?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7

2. Duas caixas, a caixa 1 e a caixa 2, têm, cada uma, um certo número de bolas brancas e um certo número de bolas verdes, indistinguíveis ao tato e que apenas se distinguem pela cor.

Considere que, inicialmente:

- o número de bolas brancas na caixa 1 é igual ao número de bolas brancas na caixa 2;
- na caixa 1 existem também 5 bolas verdes e na caixa 2 existem também 8 bolas verdes.

✱ **2.1.** Considere a experiência aleatória que consiste em retirar uma bola da caixa 1 e colocá-la na caixa 2 e depois retirar uma bola da caixa 2.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «A bola retirada da caixa 1 é branca»

B: «A bola retirada da caixa 2 é verde»

Sabendo que $P(B|A)=\frac{2}{5}$, determine $P(A)$.

2.2. Considere agora que se juntam todas as bolas numa outra caixa, a caixa 3, e se acrescentam algumas bolas brancas de modo que fiquem ao todo 30 bolas brancas e 13 bolas verdes.

2.2.1. Qual é a probabilidade de, ao retirar simultaneamente 3 bolas da caixa 3 não saírem três bolas da mesma cor?

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

2.2.2. De quantas formas visualmente diferentes as 43 bolas podem ser distribuídas por um tabuleiro de 16 lugares, como o da figura 1, de modo que em cada compartimento fique pelo menos uma e no máximo duas bolas brancas, no máximo uma bola verde e não fiquem mais do que três bolas por compartimento?

Figura 1

MATEMATICANDO

3. Na figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, a reta r e a função f.

Sabe-se que:

- a reta r é a bissetriz dos quadrantes ímpares;
- a função f é uma função afim crescente, cujo gráfico contém a origem do referencial.

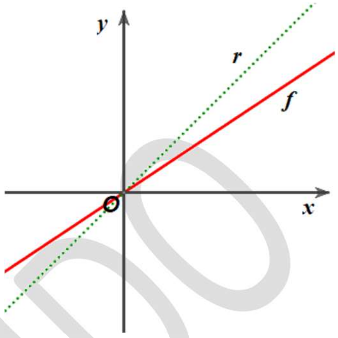

Figura 2

Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n : \begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética crescente.

(B) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética decrescente.

(C) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica crescente.

(D) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica decrescente.

4. Na figura 3, está representado, num referencial o.n. xOy, o losango $[OABC]$.

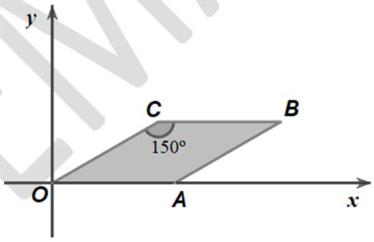

Figura 3

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox;
- o losango tem perímetro igual a 20.

Qual das seguintes é uma equação cartesiana da reta AB?

(A) $\sqrt{3}x - y - 5\sqrt{3} = 0$

(B) $\sqrt{3}x - 3y + 5\sqrt{3} = 0$

(C) $\sqrt{3}x - y + 5\sqrt{3} = 0$

(D) $\sqrt{3}x - 3y - 5\sqrt{3} = 0$

5. Na figura 4, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$.

Sabe-se que:

- o ponto E tem coordenadas $(1,5,-1)$;
- o plano BEF é definido pela equação $2x-2y+z=-9$.

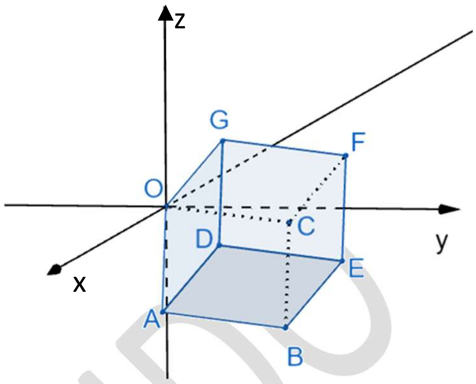

Figura 4

5.1. Determine a equação reduzida da superfície esférica de diâmetro $[AF]$.

✱ 5.2. Seja H o ponto de interseção da reta CE com o plano yOz.

Sendo α a amplitude, em radianos, do ângulo HOE, mostre que $\operatorname{sen}(2\alpha)=\dfrac{42\sqrt{2}}{153}$.

✱ 6. Na figura 5, está representado, no plano complexo, o hexágono $[ABCDEF]$, cujos vértices pertencem à circunferência de raio 2 centrada na origem do referencial.

O ponto G é o ponto de coordenadas $(2,0)$.

Os pontos A, B, C, D, E e F são os afixos das raízes de ordem 6 de um certo número complexo.

Seja z_1 o número complexo cujo afixo é o ponto A.

Sabendo que $\operatorname{Re}(z_1)=\operatorname{Im}(z_1)$, qual dos seguintes números representa a área do triângulo $[OBG]$?

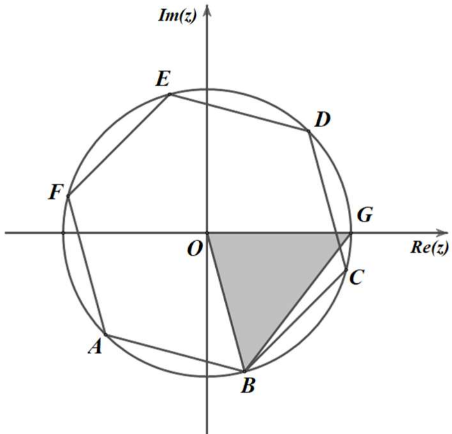

Figura 5

(A) $2\cos\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)$ **(B)** $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ **(C)** $2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ **(D)** $2\operatorname{sen}\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)$

MATEMATICANDO

7. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a equação $z^2-\sqrt{2}(2+i)z+2(1+i)=0$.

Sabe-se que a equação tem duas soluções, uma imaginária e outra real.

Seja A o afixo da solução imaginária e B o afixo da solução real.

Escreva uma condição na variável complexa que defina, no plano complexo, a circunferência de centro no ponto A e que contenha o ponto B.

Resolva sem recorrer à calculadora.

* **8.** Na tabela da figura 6 estão representados os pesos(*), em kg, e as alturas, em cm, de uma amostra de doze crianças de 12 meses.

Peso (em kg)	Altura (em cm)
7,8	71
8,6	73,5
9,6	75,7
10,3	77,2
10,8	78
11,5	79,5
7,2	69
7,9	71,5
8,9	74
9,6	75,5
10,2	76,5
11	78

Figura 6

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados representados na tabela.

Escreva na folha de respostas, apenas um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** selecionada.

A cada espaço corresponde uma única opção.

A média dos pesos das crianças é, aproximadamente, $\boxed{\text{I}}$ kg, com desvio-padrão amostral de, aproximadamente $\boxed{\text{II}}$ kg.

Aproximadamente, 75% das crianças tem peso não inferior a $\boxed{\text{III}}$ kg.

Considerando válido o modelo de regressão linear de y (altura, em cm) sobre x (peso, em kg), obtido a partir dos dados apresentados na tabela, podemos estimar, com base nesse modelo, que uma criança de 12 meses com um peso de 10 kg terá, aproximadamente, $\boxed{\text{IV}}$ cm de altura.

I	II	III	IV
a) $9{,}4$	**a)** $1{,}2$	**a)** $8{,}3$	**a)** 75
b) $9{,}5$	**b)** $1{,}3$	**b)** $9{,}6$	**b)** 76
c) $9{,}6$	**c)** $1{,}4$	**c)** $10{,}6$	**c)** 77

(*)Na sua aceção corrente, a palavra «peso» é utilizada como sinónimo de massa.

MATEMATICANDO

9. Seja f , a função de domínio $\mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{1}{e}\right\}$, definida por $f(x)=\frac{x}{1+\ln(x)}$.

Resolva os itens **9.1**, **9.2** e **9.3** sem recorrer à calculadora.

9.1. Estude a função quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico. Caso exista alguma assíntota, escreva a sua equação.

9.2. Determine o conjunto dos valores de x para os quais o gráfico da função f está acima do gráfico da função g definida por $g(x)=x\ln(x)$.

* **9.3.** Estude a função f quanto à existência de extremo(s) relativos e determine esse(s) extremo(s), caso exista(m).
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

* **9.4.** Seja g uma função real de variável real, derivável em $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$, tal que $g'(x)=f(x), \forall x \in \left]\frac{1}{e},+\infty\right[$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to e}\frac{g(e)-g(x)}{x^2-e^2}$?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $-\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $-\frac{1}{2}$

* **10.** Seja f uma função real, derivável e positiva, de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que:

- $f(0)\neq f(1)$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{f(x)}=\frac{2}{3}$.

Considere as proposições seguintes:

I. A equação $f(x)=\frac{f(0)+f(1)}{2}$ é impossível.

II. O gráfico da função $\frac{1}{f}$ admite pelo menos uma assíntota vertical.

III. O gráfico da função g , definida por $g(x)=f(-x)$ pode admitir uma assíntota oblíqua de declive $-\frac{2}{3}$ quando $x\to+\infty$.

Justifique que as proposições I, II e III são falsas.
Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

MATEMATICANDO

✱ 11. Admita que a altura de uma árvore da espécie *Eucalyptus globulus,* a partir do momento em que é plantada, é bem modelada pela função $h(t)=20\left(1-e^{-0,5t}\right)+5\ln(1+0,8t)+0,2$, em que $h(t)$ é a altura da árvore, em metros, t anos após ter sido plantada, com $t\in[0,30]$.

Existe um instante a partir do qual, ao fim de 10 anos, a altura da árvore aumenta 30%.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, esse instante, sabendo-se que existe e é único.

Apresente o resultado em anos, arredondado às décimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

Apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

Represente num referencial o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

✱ 12. Para certos valores reais de b e de m, não nulos, a reta de equação $y=mx-2$ é tangente ao gráfico da função quadrática definida por $f(x)=3x^2+bx+2$ num ponto, P, cuja abcissa é positiva e a ordenada é 2.

Determine o valor de m.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>2.1</td><td>3.</td><td>4.</td><td>5.2</td><td>6.</td><td>8.</td><td>9.3</td><td>9.4</td><td>10.</td><td>11.</td><td>12.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">2.2.1</td><td colspan="2">2.2.2</td><td colspan="2">5.1</td><td colspan="2">7.</td><td colspan="2">9.1</td><td colspan="2">9.2</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">6 x 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td colspan="12"></td><td>200</td></tr>
</table>

MATEMATICANDO