PROVA MODELO - MATEMÁTICA A ***Matematicando*** (www.amatoso.org)

Ensino Secundário | 2025 **PROPOSTA DE CORREÇÃO**

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

---

1. A concentração do medicamento em cada hora pode ser modelada por uma progressão geométrica de razão $0,7$, sendo $120\times 0,7$ o seu primeiro termo (concentração quando $n=1$)

O termo geral dessa progressão é $C_n = 120\times 0,7\times 0,7^{n-1} \Leftrightarrow C_n = 120\times 0,7^n$.

$$C_n < 20 \Leftrightarrow 120\times 0,7^n < 20 \Leftrightarrow 0,7^n < \frac{20}{120} \Leftrightarrow 0,7^n < \frac{1}{6} \Leftrightarrow n > \log_{0,7}\left(\frac{1}{6}\right)$$

Como $\log_{0,7}\left(\frac{1}{6}\right) \approx 5,02$, terão de passar, no mínimo, 6 horas para que a concentração seja inferior a 20 .

Opção: **(C)**

2.

CAIXA 1	CAIXA 2
n bolas brancas	n bolas brancas
5 bolas verdes	8 bolas verdes

2.1. Seja n o número de bolas brancas em cada caixa.

$$P(B\mid A) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{8}{n+1+8} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 40 = 2n+18 \Leftrightarrow n = 11$$

Assim, $P(A) = \frac{11}{16}$.

2.2.

CAIXA 3
30 bolas brancas
13 bolas verdes

2.2.1. $n.^{\text{o}}\, c.p. = {}^{43}C_3$

Seja C: «As três bolas retiradas não são todas da mesma cor»

Assim, $\overline{C}$: «As três bolas retiradas são todas da mesma cor»

$$n.^{\text{o}}\, c.f._{\overline{C}} = {}^{30}C_3 + {}^{13}C_3$$

$$P\left(\overline{C}\right) = \frac{{}^{30}C_3 + {}^{13}C_3}{{}^{43}C_3}, \text{ logo, } P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - \frac{{}^{30}C_3 + {}^{13}C_3}{{}^{43}C_3} \approx 65\%$$

MATEMATICANDO

2.2.2. Começamos por colocar uma bola branca em cada compartimento (como as bolas são todas iguais há apenas uma maneira de o fazer). Ficamos assim com 14 bolas brancas por colocar.

Vamos agora escolher dos 16 lugares, 14 lugares para as restantes bolas brancas, o que pode ser feito de ${}^{16}C_{14}$ maneiras.

Coloquemos agora as bolas verdes, não mais do que uma por compartimento, o que pode ser feito de ${}^{16}C_{13}$ maneiras.

Assim, como para cada uma das ${}^{16}C_{14}$ maneiras de colocar as restantes bolas brancas, há ${}^{16}C_{13}$ maneiras de colocar as bolas verdes, o número pedido é dado por ${}^{16}C_{14} \times {}^{16}C_{13}$, ou seja, é 67200.

3. Uma vez que f é uma função afim crescente cujo gráfico contém a origem do referencial, $f(x) = kx$, sendo k um número real positivo. Como a reta que representa a função f tem declive inferior a 1 (por observação da figura e uma vez que o declive da reta r é 1), sabemos que $0 < k < 1$.

Assim, $f(u_n) = k \times u_n$, e, portanto, $u_n : \begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = k \times u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$, sendo $0 < k < 1$.

$u_{n+1} = k \times u_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = k, \forall n \in \mathbb{N}$, logo (u_n) é uma progressão geométrica de razão k e, sendo $0 < k < 1$ e $u_1 > 0$, é uma progressão geométrica decrescente. Opção: **(D)**

4. Uma vez que o perímetro do losango é 20, os lados têm comprimento 5, logo $A(5,0)$.

Por se tratar de um paralelogramo os ângulos consecutivos são suplementares, logo $A\hat{O}C = 30^{\circ}$. Assim, o declive da reta OC é $\operatorname{tg}(30^{\circ})$, ou seja, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Novamente por se tratar de um paralelogramo, os lados opostos são paralelos, logo a reta AB é paralela à reta OC e, portanto, $m_{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Assim a equação reduzida da reta AB é do tipo $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + b$. Como o ponto A pertence à reta, vem $0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times 5 + b \Leftrightarrow b = -\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. Então $AB : y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - \dfrac{5\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3y = \sqrt{3}x - 5\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y - 5\sqrt{3} = 0$ Opção: **(D)**

MATEMATICANDO

5.

5.1. A superfície esférica de diâmetro $[AF]$ tem centro no centro do cubo, ou seja, no ponto médio de $[AF]$, que é também o ponto médio de $[OE]$, e tem raio igual a $\frac{\overline{OE}}{2}$.

$M_{[OE]}\left(\frac{0+1}{2},\frac{0+5}{2},\frac{-1+0}{2}\right)$, ou seja, $M_{[OE]}\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{\overline{OE}}{2}=\frac{\sqrt{(1-0)^2+(5-0)^2+(-1-0)^2}}{2}=\frac{\sqrt{27}}{2}$$

Equação reduzida da superfície esférica: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$

5.2. Comecemos por determinar as coordenadas do ponto C.

Uma vez que a aresta $[OC]$ é perpendicular à face $[BEFC]$, a reta OC é perpendicular ao plano BEF e interseta este plano no ponto C. Assim, o vetor $\vec{n}_{BEF}=(2,-2,1)$, por ser um vetor normal ao plano BEF, é um vetor diretor da reta OC.

$OC:(x,y,z)=(0,0,0)+k(2,-2,1),k\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}x=0+2k\\y=0-2k\\z=0+k\\2x-2y+z=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\\y=-2k\\z=k\\2\times2k-2\times2k+k=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=2\\z=-1\\k=-1\end{cases}$$, logo $C(-2,2,-1)$.

Vamos agora definir a reta CE e intersetar essa reta com o plano yOz, ou seja, com o plano de equação $x=0$, para determinar as coordenadas do ponto H.

$\overrightarrow{CE}=E-C=(3,3,0)$

$CE:(x,y,z)=(-2,2,-1)+k(3,3,0),k\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}x=-2+3k\\y=2+3k\\z=-1\\x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=-2+3k\\y=2+3k\\z=-1\\x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{2}{3}\\y=2+3\times\frac{2}{3}\\z=-1\\x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}---\\y=4\\z=-1\\x=0\end{cases}$$, logo $H(0,4,-1)$

$\alpha=H\hat{O}E$

$$\cos(\alpha)=\cos\left(\overrightarrow{OH}\hat{,}\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OE}}{\left\|\overrightarrow{OH}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OE}\right\|}=\frac{(0,-4,1)\cdot(1,5,-1)}{\sqrt{16+1}\times\sqrt{1+25+1}}=\frac{21}{\sqrt{17}\times3\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{51}},$$

$$\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2(\alpha)=1-\left(\frac{7}{\sqrt{51}}\right)^2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2(\alpha)=1-\frac{49}{51} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2(\alpha)=\frac{2}{51} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\alpha)=\pm\sqrt{\frac{2}{51}}$$

Como α é a amplitude do ângulo de dois vetores e $\cos(\alpha)>0$, $\operatorname{sen}(\alpha)>0$ (pois $\operatorname{sen}(\alpha)\neq 0$) e, portanto, $\operatorname{sen}(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{51}}$.

Assim, $\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)=2\times\frac{7}{\sqrt{51}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{51}}=\frac{14\sqrt{2}}{51}$.

6. $z_A=2e^{i\frac{5\pi}{4}}$, logo $z_B=2e^{i\frac{5\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z_B=2e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow z_B=2e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)} \Leftrightarrow z_B=2\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+2i\operatorname{sen}\left(\frac{19\pi}{12}\right)$, logo

$B\left(2\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right),2\operatorname{sen}\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$ e, portanto, $Área_{[OGB]}=\frac{\overline{OG}\times(-y_B)}{2}=\frac{2\times\left(-2\operatorname{sen}\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)}{2}=-2\operatorname{sen}\left(\frac{19\pi}{12}\right)$.

Ora, $\frac{19\pi}{12}=\frac{24\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}=2\pi-\frac{5\pi}{12}$, logo $-2\operatorname{sen}\left(\frac{19\pi}{12}\right)=-2\operatorname{sen}\left(2\pi-\frac{5\pi}{12}\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Como $\frac{5\pi}{12}=\frac{6\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$, $2\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ Opção: **(B)**

7. $z^2-\sqrt{2}(2+i)z+2(1+i)=0 \Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{2}(2+i)\pm\sqrt{\left(\sqrt{2}(2+i)\right)^2-4\times 2(1+i)}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}i\pm\sqrt{2(2+i)^2-8-8i}}{2} \Leftrightarrow z=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}i\pm\sqrt{2(4+4i-1)-8-8i}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}i\pm\sqrt{8+8i-2-8-8i}}{2} \Leftrightarrow z=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}i\pm\sqrt{-2}}{2} \Leftrightarrow z=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}i\pm\sqrt{2}i}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}i+\sqrt{2}i}{2} \vee z=\frac{2\sqrt{2}\cancel{+\sqrt{2}i}\cancel{-\sqrt{2}i}}{2} \Leftrightarrow z=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2} \vee z=\frac{2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i \vee z=\sqrt{2}$$

Então, $z_A=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ e $z_B=\sqrt{2}$.

O raio da circunferência é igual a $|z_A-z_B|=\left|\cancel{\sqrt{2}}+\sqrt{2}i\cancel{-\sqrt{2}}\right|=\sqrt{2}$

Condição na variável complexa que define a circunferência: $\left|z-\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\right|=\sqrt{2}$.

8. I- b); II – c); III – a); IV – b)

9.

9.1. Assíntotas verticais:

Por se tratar do quociente de duas funções contínuas, uma função afim e a soma de uma função constante com uma função logarítmica, apenas poderão ser assíntotas verticais as retas de equações $x=0$ e $x=\frac{1}{e}$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{1+\ln x}=\frac{0}{1+\ln\left(0^+\right)}=\frac{0}{1+(-\infty)}=0$, logo a reta de equação $x=0$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} f(x)=\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+}\frac{x}{1+\ln x}=\frac{\frac{1}{e}}{0^+}=+\infty$, logo a reta de equação $x=\frac{1}{e}$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntota não vertical:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+\ln x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\,(1+\ln x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\ln x}=\frac{1}{1+\ln(+\infty)}=\frac{1}{1+(+\infty)}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-0x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}}=\frac{1}{0^++0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Como não obtivemos um número real, o gráfico de f não admite assíntota não vertical.

9.2. Pretendemos o conjunto-solução da condição $f(x)>g(x)$, ou seja, $\frac{x}{1+\ln(x)}>x\ln(x)$.

Consideremos x pertencente ao domínio desta condição, ou seja, $x\in\mathbb{R}^+\setminus\left\{\frac{1}{e}\right\}$.

$$\frac{x}{1+\ln(x)}>x\ln(x)\Leftrightarrow\frac{x}{1+\ln(x)}-\frac{x\ln(x)}{\underset{\times(1+\ln(x))}{1}}>0\Leftrightarrow\frac{x}{1+\ln(x)}-\frac{x\ln(x)\left(1+\ln(x)\right)}{1+\ln(x)}>0\Leftrightarrow\frac{x-x\ln(x)-x\ln^2(x)}{1+\ln(x)}>0\Leftrightarrow$$

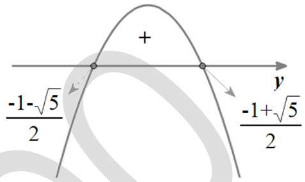
$$\Leftrightarrow\frac{x\left(1-\ln(x)-\ln^2(x)\right)}{1+\ln(x)}>0\underset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{1-\ln(x)-\ln^2(x)}{1+\ln(x)}>0$$

Cálculos auxiliares

<u>Zeros e sinal da função no numerador da fração:</u>

$$1-\ln(x)-\ln^2(x)=0 \Leftrightarrow -\ln^2(x)-\ln(x)+1=0 \Leftrightarrow \ln(x)=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{-2} \Leftrightarrow \ln(x)=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee \ln(x)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Consideremos $y=\ln(x)$ e esbocemos o gráfico da função cuja expressão algébrica é $-y^2-y+1$ e cujos zeros são $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.



Assim, $-y^2-y+1>0 \Leftrightarrow y>\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \wedge y<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e $-y^2-y+1<0 \Leftrightarrow y<\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee y>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,

logo:

$$-\ln^2(x)-\ln(x)+1>0 \Leftrightarrow \ln(x)>\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \wedge \ln(x)<\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x>e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \wedge x<e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$ e

$$-\ln^2(x)-\ln(x)+1<0 \Leftrightarrow \ln(x)<\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee \ln(x)>\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x<e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \vee x>e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

<u>Zeros e sinal da função no denominador da fração:</u>

$$1+\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=-1 \Leftrightarrow \ln(x)=\ln\left(e^{-1}\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

$1+\ln(x)<0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{e}$ e $1+\ln(x)>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$

<u>Quadro de sinais</u>

x	0		$e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$		e^{-1}		$e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$	$+\infty$
$1-\ln(x)-\ln^2(x)$	N.D.	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$1+\ln(x)$	N.D.	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-\ln(x)-\ln^2(x)}{1+\ln(x)}$	N.D.	$+$	0	$-$	N.D.	$+$	0	$-$

$$C.S.=\left]0\,,e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right[\cup\left]e^{-1}\,,e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right[$$

MATEMATICANDO

9.3. Seja $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{1}{e}\right\}$.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+\ln(x)}\right)' = \frac{x' \times (1+\ln(x)) - x \times (1+\ln(x))'}{(1+\ln(x))^2} = \frac{1 \times (1+\ln(x)) - x \times \left(0 + \frac{1}{x}\right)}{(1+\ln(x))^2} =$$

$$= \frac{1+\ln(x) - \frac{x}{x}}{(1+\ln(x))^2} = \frac{1+\ln(x)-1}{(1+\ln(x))^2} = \frac{\ln(x)}{(1+\ln(x))^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{(1+\ln(x))^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \wedge (1+\ln(x))^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x \neq \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		1	$+\infty$
$\ln(x)$	N.D.	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(1+\ln(x))^2$	N.D.	$+$	0	$+$	$+$	$+$
Zeros e sinal de f'	N.D.	$-$	N.D.	$-$	0	$+$
Variação e extremos de f	N.D.	$\searrow$	N.D.	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

A função f é decrescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ e em $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$ e é crescente em $]1, +\infty[$.

O único extremo relativo da função f é $f(1) = \frac{1}{1+\ln(1)} = 1$ e trata-se de um mínimo relativo.

9.4. $$\lim_{x \to e} \frac{g(e)-g(x)}{x^2-e^2} = \lim_{x \to e} \frac{-(g(x)-g(e))}{(x-e)(x+e)} = \lim_{x \to e} \frac{-1}{x+e} \times \lim_{x \to e} \frac{g(x)-g(e)}{x-e} = \frac{-1}{e+e} \times g'(e) \underset{g'(x)=f(x), \forall x \in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[}{=}$$

$$= -\frac{1}{2e} \times f(e) = -\frac{1}{2e} \times \frac{e}{1+\ln e} = -\frac{1}{2e} \times \frac{e}{2} = -\frac{1}{4}$$

Opção: **(B)**

10. Relativamente à proposição I:

(1) A função f é derivável em $\mathbb{R}$, logo é contínua em $\mathbb{R}$. Em particular, f é contínua no intervalo $[0,1]$.

(2) Como $f(0) \neq f(1)$, $\frac{f(0)+f(1)}{2}$ é a média aritmética entre $f(0)$ e $f(1)$, logo, $f(0) < \frac{f(0)+f(1)}{2} < f(1)$

Por (1) e (2) e atendendo ao teorema de Bolzano, $\exists c \in]0,1[: f(c) = \frac{f(0)+f(1)}{2}$ e, portanto, a equação $f(x) = \frac{f(0)+f(1)}{2}$ é possível, daí que a proposição I seja falsa.

Relativamente à proposição II:

$$D_{\frac{1}{f}} = \{x \in D_f : f(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

Como sabemos que a função f é positiva em todo o seu domínio, $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e, portanto, $D_{\frac{1}{f}} = \mathbb{R}$.

Como $\frac{1}{f}$ é o quociente de duas funções contínuas (uma função constante e a função f que é derivável em $\mathbb{R}$), a função $\frac{1}{f}$ é contínua. Assim, como $\frac{1}{f}$ é uma função contínua de domínio $\mathbb{R}$, o seu gráfico não admite assíntotas verticais e, portanto a proposição II é falsa.

Relativamente à proposição III:

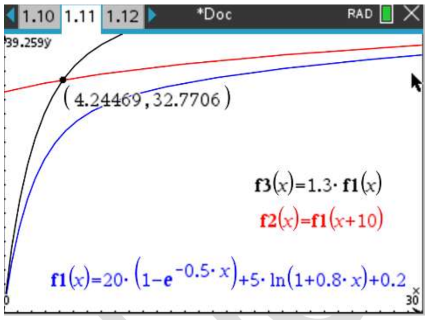
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(-x)}{x} \underset{M.V.}{=} \lim_{y\to-\infty} \frac{f(y)}{-y} = -\lim_{y\to-\infty} \frac{f(y)}{y} = -\frac{1}{\lim\limits_{y\to-\infty} \frac{y}{f(y)}} = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$, logo a proposição III é falsa.

$M.V.$:

$y = -x$ Se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$

11. A equação que pretendemos resolver é: $h(t+10)=1,3\times h(t)$.

Consideremos as funções:



$f_1(x)=20\left(1-e^{-0,5x}\right)+5\ln(1+0,8x)+0,2$

$f_2(x)=f_1(x+10)$

$f_3(x)=1,3\times f_1(x)$

O valor de t pretendido é a abcissa do ponto de interseção dos gráficos das funções f_2 e f_3.

Resposta: O instante pedido é, aproximadamente, $4,2$ anos.

12. Seja a a abcissa do ponto P. Assim, $P(a,f(a))$.

Sabemos também que o ponto P tem ordenada 2, logo $f(a)=2$.

$$f(a)=3a^2+ba+2 \Leftrightarrow 3a^2+ba+2=2 \Leftrightarrow 3a^2+ba=0 \Leftrightarrow a(3a+b)=0 \Leftrightarrow a=0 \vee 3a+b=0 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} b=-3a$$

Como o ponto P também pertence à reta dada, $f(a)=ma-2 \Leftrightarrow 2=ma-2 \Leftrightarrow \frac{4}{m}=a$ e, portanto, $b=-\frac{12}{m}$

Sabemos ainda que, uma vez que a reta é tangente ao gráfico de f no ponto P, $f'(a)=m$.

Como $f'(x)=6x+b$, vem que $6a+b=m$ (1)

Como $\frac{4}{m}=a$ e $b=-\frac{12}{m}$, substituindo em (1), vem:

$$6\times\frac{4}{m}-\frac{12}{m}=m \Leftrightarrow \frac{12}{m}=m \Leftrightarrow m^2=12 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{12}$$

Como $\frac{4}{m}=a$ e $a>0$, concluímos que $m>0$, logo, $m=\sqrt{12}$, ou seja, $m=2\sqrt{3}$.

FIM

MATEMATICANDO