PROVA MODELO - MATEMÁTICA A ***Matematicando*** (www.amatoso.org)

Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 7 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.
As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere as sucessões de números reais definidas por $u_n : \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3+u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ e $v_n = \dfrac{2+u_n}{u_n}$.

1.1. Mostre que a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

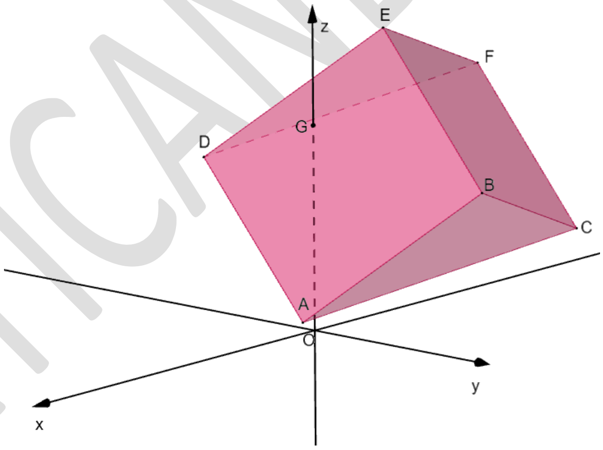
✱ **1.2.** Qual é o limite da sucessão (u_n)?

(A) 2 **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** $\dfrac{1}{3}$

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $G(0,0,7)$ e o o prisma triangular reto $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:

- o ponto G pertence à face $[ABED]$;
- o segmento de reta $[AC]$ é um diâmetro da superfície esférica, S, à qual pertence o ponto B;
- a reta BC é definida por $(x,y,z)=(2,8,7)+k(-2,-1,-1),\quad k \in \mathbb{R}$;
- $\overline{GA}=\overline{GB}=2\sqrt{11}$;
- $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=20$.



✱ **2.1.** Qual é a medida do comprimento de $[AB]$?

(A) $8\sqrt{11}$ **(B)** $4\sqrt{3}$ **(C)** $4\sqrt{6}$ **(D)** $4\sqrt{11}$

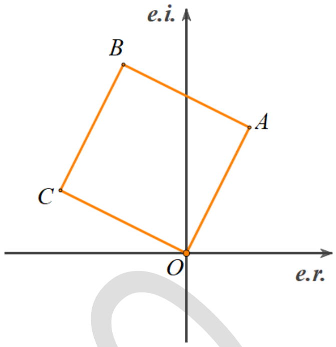
✱ **2.2.** Determine as coordenadas do ponto B.

✱ **3.** Considere o complexo $z=1+e^{i(2x)}$ do qual se sabe que $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$ e que $|z|=\sqrt{3}$.

Em qual das seguintes opções está representado o complexo z?

(A) $z=\sqrt{3}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ **(B)** $z=\sqrt{3}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ **(C)** $z=\sqrt{3}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ **(D)** $z=\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

4. Na figura ao lado está representado, no plano complexo, o quadrado $OABC$.



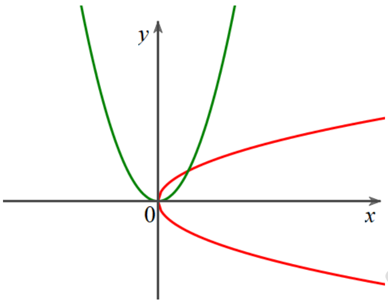
O ponto B é o afixo do número complexo $z_B = -1+\sqrt{3}i$.

O ponto C é o afixo de uma das raízes de ordem 6 de um complexo w.

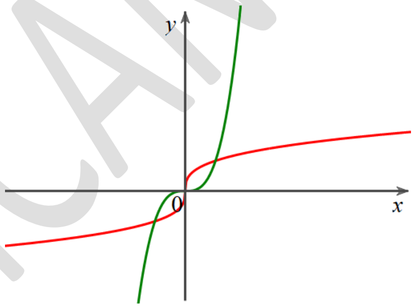
Sabendo que w é uma das soluções da equação $z^3+8iz^2+z+8i=0$, determine as restantes soluções da equação.

✱ 5. Em qual das seguintes opções podem estar representadas, num referencial o.n. Oxy, uma função, f e a sua função inversa f^{-1}?

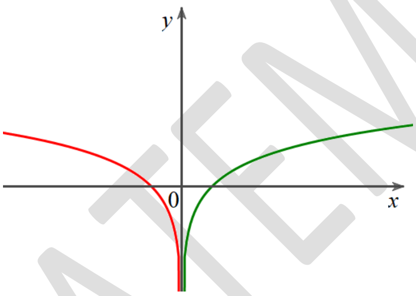
(A)



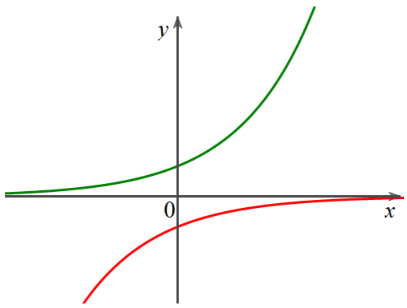
(B)



(C)



(D)



✱ 6. Considere uma função f contínua, de domínio $\mathbb{R}$, e a função g, de domínio $]1,+\infty[$, das quais se sabe que:

- f é uma função par;
- a reta de equação $y=-3x+1$ é assíntota ao gráfico de f quando x tende para $-\infty$;
- $g(x)=\dfrac{f(x)}{\ln\left(x^2\right)+x}$.

Mostre que a função g admite uma assíntota horizontal ao seu gráfico.

7. Considere a função, real de variável real, de domínio $]-1,+\infty[$, definida por $h(x)=x-\ln\left[(x+1)^2\right]$.

7.1. Sem recorrer à calculadora, determine o conjunto-solução da equação $h(x)=\ln\left(\dfrac{e^x}{2x+2}\right)$.

✱ **7.2.** Mostre, analiticamente, que $\ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\leq\dfrac{x-1}{2},\ \forall x\in\,]-1,+\infty[$, começando por estudar a variação da função h.

✱ **7.3.** Considere o gráfico da função h representado num referencial o.n. Oxy.

Seja P um ponto, de abcissa x, pertencente ao gráfico de h, Q a sua projeção ortogonal no eixo Ox e R a sua projeção ortogonal no eixo Oy. Para os pontos P cuja abcissa não é um zero da função h, os pontos O, P, Q e T são os vértices de um retângulo.

Recorrendo às potencialidades gráficas da sua calculadora, determine o(s) valor(es) de x para os quais se obtém um retângulo $OPQT$ com área igual a 1.

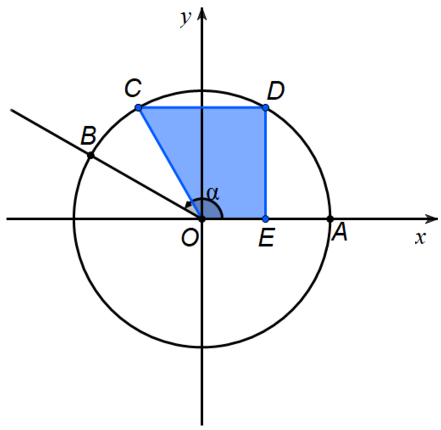
Apresente o(s) valor(es) arredondado(s) às centésimas.

Na sua resposta:

— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

— represente num referencial o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizados na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

8. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e raio 2 e o trapézio $[OCDE]$. Sabe-se que:



- o ponto A tem de coordenadas $2,0$;
- o ponto B desloca-se sobre a circunferência no segundo quadrante e pertence ao semiplano definido por $y<-x$;
- o ponto C é o simétrico do ponto B em relação à bissetriz dos quadrantes pares;
- o ponto D pertence à circunferência e é tal que a reta CD é paralela ao eixo Ox;
- o ponto E pertence ao eixo das abcissas e é tal que a reta ED é paralela ao eixo Oy.

Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha\in\left]\dfrac{3\pi}{4},\pi\right[$.

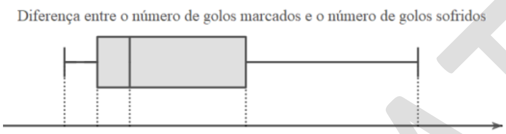
Determine o(s) valor(es) de α para os quais a área do trapézio $[OCDE]$ é igual a $\dfrac{3}{2}$.

9. Na tabela ao lado estão registados, para cada um dos clubes que disputou a Liga Portugal e terminou nos doze primeiros lugares, a diferença entre o número de golos marcados e o número de golos sofridos e o número de pontos obtidos.

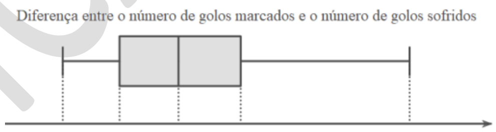
Clube	Diferença entre o n.º de golos marcados e o n.º de golos sofridos	Nº de pontos
Sporting CP	67	90
Benfica	49	80
FC Porto	36	72
Braga	21	68
Vitória SC	14	63
Moreirense	1	55
Arouca	4	46
Famalicão	-4	42
Casa Pia AC	-12	38
Farense	-5	37
Rio Ave	-5	36
Gil Vicente	-10	33

✱ **9.1.** Em qual dos diagramas de extremos e quartis seguintes pode estar representada a distribuição da diferença entre o número de golos marcados e o número de golos sofridos?

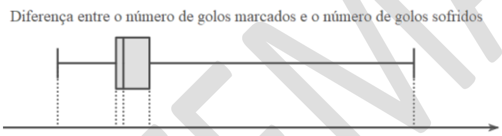
(A)



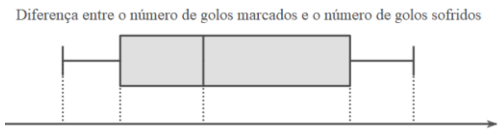
(B)



(C)



(D)



9.2. Admita que a relação entre as variáveis x: «Diferença entre o n.º de golos marcados e o n.º de golos sofridos» e y: «Número de pontos» é bem aproximada por uma regressão linear na forma $y = ax + b$.

Determine qual poderá ter sido o número de pontos obtidos por uma equipa que tenha marcado 33 golos e tenha sofrido 53 golos.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Na sua resposta, apresente a equação da reta de regressão, com os valores de a e de b arredondados às centésimas.

* **10.** Numa escola, no final do ano letivo, todos os 60 professores da escola estarão envolvidos em novas tarefas.

- 70% dos professores estarão apenas envolvidos com o processo de exames;
- um em cada cinco professores irá apenas preparar as turmas e os horários do ano letivo seguinte;
- os restantes estarão envolvidos em tarefas de organização diferentes das anteriores.

Selecionam-se, ao acaso, quatro professores dessa escola.

A expressão seguinte permite determinar a probabilidade de serem selecionados, no máximo, três professores envolvidos na preparação de turmas e horários e nenhum professor envolvido no processo de exames.

$$\frac{{}^{18}C_4 - {}^{12}C_4}{{}^{60}C_4}$$

Explique esta expressão no contexto descrito.

Na sua resposta:

— enuncie a regra de Laplace;

— explique o número de casos possíveis;

— explique o número de casos favoráveis.

* **11.** O primeiro exercício de um exame tem duas alíneas que designaremos por a e b.

Consideremos que:

- há uma probabilidade de 80% de um aluno, escolhido ao acaso, responder corretamente à alínea a;
- se um aluno responder corretamente à alínea a, tem 60% de probabilidade de responder corretamente à alínea b e se não responder corretamente à alínea a tem 10% de probabilidade de responder corretamente à alínea b.

Escolhendo, ao acaso, um dos alunos que resolveu o exame, qual é a probabilidade de ter respondido corretamente à alínea b?

12. Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos possíveis $(A \subset E \text{ e } B \subset E)$.

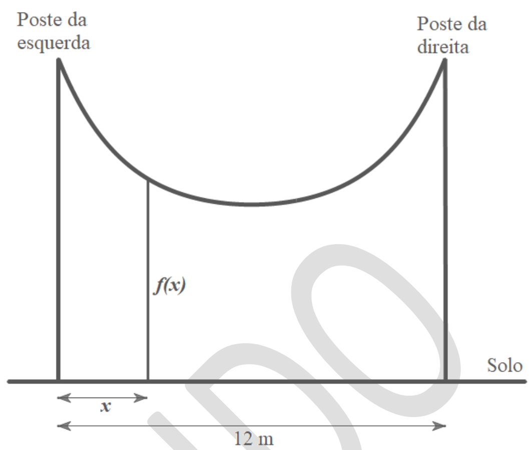
Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes;
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - \frac{P(B)}{2}$;
- $P(A \cup B) = \frac{4}{3} P(B)$

Determine o valor de $P(B)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

✱ **13.** Na figura ao lado, está representado um cabo suspenso pelas suas extremidades em dois postes iguais, distanciados 12 metros entre si. Os postes estão instalados perpendicularmente ao solo, num terrreno plano e horizontal.



Seja f a função, de domínio $[0,12]$, definida por

$$f(x)=\frac{e^{\frac{x-6}{2}}+e^{\frac{6-x}{2}}}{4}+5$$

Admita que $f(x)$ é a altura, relativamente ao solo, em metros, de um ponto do cabo situado a x metros do poste da esquerda.

Determine, analiticamente, a distância entre os dois pontos do cabo que estão a uma altura de 6,3 metros.

Apresente o resultado na forma $\ln(a)$, sendo a um número positivo.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.2	2.1	2.2	3.	5.	6.	7.2	7.3	9.1	10.	11.	13.	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	12	14	14	14	12	14	14	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	1.1		4.		7.1		8.		9.2		12.		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	6 x 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**