PROVA MODELO - MATEMÁTICA A

Matematicando (www.amatoso.org)

Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

PROPOSTA DE CORREÇÃO

1. $u_n : \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3+u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ e $v_n = \dfrac{2+u_n}{u_n}$.

1.1. $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{2+u_{n+1}}{u_{n+1}}}{\dfrac{2+u_n}{u_n}} = \frac{(2+u_{n+1})\times u_n}{(2+u_n)\times u_{n+1}} = \frac{\left(2+\dfrac{u_n}{3+u_n}\right)\times u_n}{(2+u_n)\times\dfrac{u_n}{3+u_n}} = \frac{\left(\dfrac{6+2u_n+u_n}{3+u_n}\right)\times u_n}{\dfrac{(2+u_n)\times u_n}{3+u_n}} = \frac{\left(\dfrac{3(2+u_n)}{3+u_n}\right)\times \cancel{u_n}}{\dfrac{(2+u_n)\times \cancel{u_n}}{3+u_n}} \underset{(1)}{=}$$

$$= \frac{3\times\cancel{\dfrac{(2+u_n)}{3+u_n}}}{\cancel{\dfrac{(2+u_n)}{3+u_n}}} = 3, \forall n \in \mathbb{N}$$, logo (v_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

(1) Uma vez que $u_1 = 1$ e cada termo da sucessão é definido a partir do anterior por operações que preservam o sinal, podemos concluir que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

* **1.2.** Uma vez que $v_1 = \dfrac{2+u_1}{u_1}$, vem que $v_1 = \dfrac{2+1}{1} \Leftrightarrow v_1 = 3$, logo, como $r = 3$, concluímos que

$v_n = 3\times 3^{n-1} \Leftrightarrow v_n = 3^n$

$3^n = \dfrac{2+u_n}{u_n} \Leftrightarrow u_n \times 3^n = 2+u_n \Leftrightarrow u_n\times 3^n - u_n = 2 \Leftrightarrow u_n \times (3^n - 1) = 2 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{2}{3^n-1}$

$\lim(u_n) = \lim\dfrac{2}{3^n-1} = \dfrac{2}{+\infty - 1} = 0$

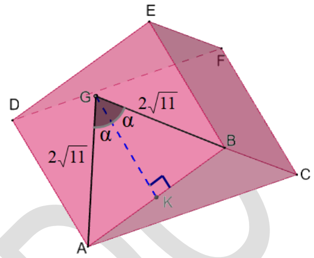
Opção (C)

Ou

Como $v_n = \dfrac{2+u_n}{u_n}$, vem que $v_n = \dfrac{2}{u_n}+1$, logo, como (v_n) é uma progressão geométrica de razão superior a 1, cujo primeiro termo é positivo, $v_n \to +\infty$ e, portanto (u_n) terá de tender para zero.

2.

✱ **2.1.** $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=20 \Leftrightarrow 2\sqrt{11}\times 2\sqrt{11}\times\cos\left(A\hat{G}B\right)=20 \Leftrightarrow \cos\left(A\hat{G}B\right)=\frac{20}{44} \Leftrightarrow \cos\left(A\hat{G}B\right)=\frac{5}{11}$



Consideremos o ponto K, ponto médio de $[AB]$.

Os triângulos $[AGK]$ e $[BGK]$ são retângulos e geometricamente iguais.

Sendo $A\hat{G}K=\alpha$, vem que $A\hat{G}B=2\alpha$.

$$\cos(2\alpha)=\frac{5}{11} \Leftrightarrow \cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{5}{11} \Leftrightarrow 1-\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{5}{11} \Leftrightarrow 1-2\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{5}{11} \Leftrightarrow -2\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{5}{11}-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\operatorname{sen}^2\alpha=-\frac{6}{11} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=\frac{3}{11} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\pm\sqrt{\frac{3}{11}}$$

Como AGK é um ângulo agudo, $\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Assim, como $\operatorname{sen}\alpha=\frac{\overline{KB}}{2\sqrt{11}}$, vem que $\frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{11}}}=\frac{\overline{KB}}{2\cancel{\sqrt{11}}} \Leftrightarrow \overline{KB}=2\sqrt{3}$ e, portanto, $\overline{AB}=4\sqrt{3}$. Opção (B)

✱ **2.2.** Uma vez que o segmento de reta $[AC]$ é um diâmetro de uma superfície esférica à qual pertence o ponto B, sabemos que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, logo a reta BC é perpendicular à reta AB. Como a reta BC também é perpendicular à reta BE, sabemos que a reta BC é perpendicular ao plano ABE.

Podemos então definir o plano ABE, usando, como vetor normal ao plano, o vetor $\vec{n}=(-2,-1,-1)$, e o ponto G.

$ABE: -2x-y-z+d=0$.

Como G pertence ao plano, vem que $-7+d=0 \Leftrightarrow d=7$.

Assim, $ABE: -2x-y-z+7=0$

O ponto B é o ponto de interseção da reta BC com o plano ABE.

$$\begin{cases} x=2-2k \\ y=8-k \\ z=7-k \\ -2x-y-z+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2k \\ y=8-k \\ z=7-k \\ -2(2-2k)-(8-k)-(7-k)+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2k \\ y=8-k \\ z=7-k \\ -4+4k-8+k-7+k+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2k \\ y=8-k \\ z=7-k \\ 6k=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=6 \\ z=5 \\ k=2 \end{cases} \qquad \therefore B(-2,6,5)$$

✱ 3. $z=1+e^{i(2x)} \Leftrightarrow z=1+\cos(2x)+i\,\mathrm{sen}(2x) \Leftrightarrow z=1+\cos^2 x-\mathrm{sen}^2 x+i2\,\mathrm{sen}\,x\cos x \Leftrightarrow z=2\cos^2 x+i2\,\mathrm{sen}\,x\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=2\cos x(\cos x+i\,\mathrm{sen}\,x) \Leftrightarrow z=2\cos x\, e^{ix}$

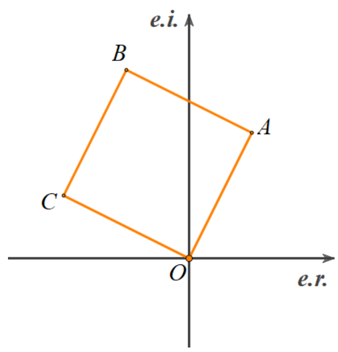
> Note que, como $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, $2\cos x>0$ e, portanto, $z=2\cos x\, e^{ix}$ é a forma trigonométrica do complexo z.

$|z|=\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\cos x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Como $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, $x=-\frac{\pi}{6}$, logo $z=3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ Opção (A)

4. Uma vez que $[OABC]$ é um quadrado, $\overline{OB}=\sqrt{2}\times\overline{OC}$, logo $\overline{OC}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{OB}$.

Como $B\hat{O}C=\frac{\pi}{4}$, $z_C=z_B\times\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$



Seja $z_B=\rho e^{i\theta}$

$\rho=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$

$\mathrm{tg}\,\theta=-\sqrt{3}$ e $\theta\in 2^{\text{o}}\text{Q}$, logo $\theta=\frac{2\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z_B=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ e, portanto, $z_C=2e^{i\frac{2\pi}{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow z_C=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow z_C=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$

O ponto C é o afixo de uma das raízes de ordem 6 de um complexo w, logo

$$w=(z_C)^6=\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}\right)^6=\sqrt{2}^6 e^{i\left(6\times\frac{11\pi}{12}\right)}=2^{\frac{6}{2}}e^{i\left(\frac{11\pi}{2}\right)}=2^3 e^{i\left(\frac{12\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}=8e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=-8i$$

Como $-8i$ é uma das soluções da equação $z^3+8iz^2+z+8i=0$, sabemos que o polinómio $P(z)=z^3+8iz^2+z+8i$ é divisível por $z+8i$.

Efetuando a divisão através da Regra de Ruffini:

	1	8i	1	8i
-8i		-8i	0	-8i
	1	0	1	0 =Resto

vem que $P(z)=(z+8i)(z^2+1)$

Então a equação dada é equivalente a $(z+8i)(z^2+1)=0$.

$$(z+8i)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow z+8i=0 \vee z^2+1=0 \Leftrightarrow z=-8i \vee z=\pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow z=-8i \vee z=\pm i$$

As restantes soluções da equação são $-i$ e i.

✱ **5.** Os gráficos de uma função e da sua função inversa são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, logo a única opção possível é a opção (B).

Nota: na opção (A) também existe simetria dos gráficos, mas, uma vez que a função representada a verde não admite inversa por não ser injetiva, o gráfico a vermelho não é gráfico de uma função.

✱ **6.** Como a reta de equação $y=-3x+1$ é assíntota ao gráfico de f quando x tende para $-\infty$, sabemos que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-3.$$

Ora, se f é uma função par, $f(-x)=f(x), \forall x\in D_f$, logo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(-x)}{x}=-\lim_{-x\to-\infty}\frac{f(-x)}{-x}=-\lim_{y\to-\infty}\frac{f(y)}{y}=-(-3)=3$$

A função g admite uma assíntota horizontal ao seu gráfico se $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=b$, sendo $b\in\mathbb{R}$.

Note que, como $D_g=]1,+\infty[$, a existir assíntota horizontal será quando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln(x^2)+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\ln(x^2)+x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)+x}{x}}=\frac{3}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}}=$$

$$=\frac{3}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}1}=\frac{3}{2\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}+1}=\frac{3}{2\times0+1}=3$$

Note que, como $D_g=]1,+\infty[$, $\ln(x^2)=2\ln(x)$.

Assim, a função g admite como assíntota ao seu gráfico a reta horizontal de equação $y=3$.

7.

7.1. Seja $x \in \left]-1,+\infty\right[$

$$h(x)=\ln\left(\frac{e^x}{2x+2}\right) \Leftrightarrow x-\ln\left[(x+1)^2\right]=\ln\left(\frac{e^x}{2x+2}\right) \Leftrightarrow x-\ln\left[(x+1)^2\right]=\ln\left(e^x\right)-\ln(2x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-\ln\left[(x+1)^2\right]=x-\ln(2x+2) \Leftrightarrow -\ln\left[(x+1)^2\right]=-\ln(2x+2) \Leftrightarrow \ln\left[(x+1)^2\right]=\ln(2x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2=2(x+1) \Leftrightarrow (x+1)^2-2(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+1-2)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$$

Como $-1 \notin \left]-1,+\infty\right[$, $C.S.=\{1\}$

✱7.2. $h'(x)=\left[x-\ln\left[(x+1)^2\right]\right]'=x'-\left[\ln\left[(x+1)^2\right]\right]'=1-\frac{2\cancel{(x+1)}\times 1}{(x+1)^{\cancel{2}}}=1-\frac{2}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \wedge \underbrace{x+1\neq 0}_{\text{condição universal no domínio}} \Leftrightarrow x=1$$

x	-1		1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	0	$+$	$+$	$+$
Zeros e sinal de h'	n.d.	$-$	0	$+$
Variação e extremos de h	n.d.	$\searrow$	$h(1)$	$\nearrow$

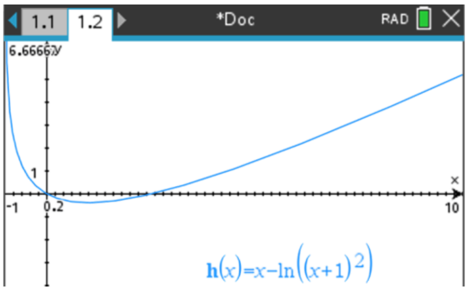
$h(1)=1-\ln\left[(1+1)^2\right]=1-\ln 4$ é o mínimo absoluto da função h, logo, $h(x)\geq 1-\ln(4)$, $\forall x \in \left]-1,+\infty\right[$

$$x-\ln\left[(x+1)^2\right]\geq 1-2\ln(2) \Leftrightarrow -\ln\left[(x+1)^2\right]\geq 1-2\ln(2)-x \Leftrightarrow 2\ln(x+1)\leq -1+2\ln(2)+x \Leftrightarrow$$

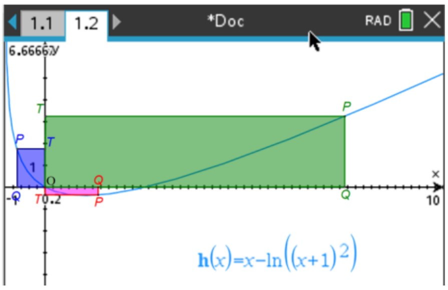
$$\Leftrightarrow 2\ln(x+1)-2\ln(2)\leq x-1 \Leftrightarrow \ln(x+1)-\ln(2)\leq \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)\leq \frac{x-1}{2}, \forall x \in \left]-1,+\infty\right[$$

✱ 7.3. Seja $P\ x,h(x)$ um ponto pertencente ao gráfico da função h, cuja abcissa não é um dos zeros da função h.

Comecemos por visualizar na calculadora o gráfico da função h para perceber quais são, para cada ponto P, as dimensões do retângulo $[OPQT]$.



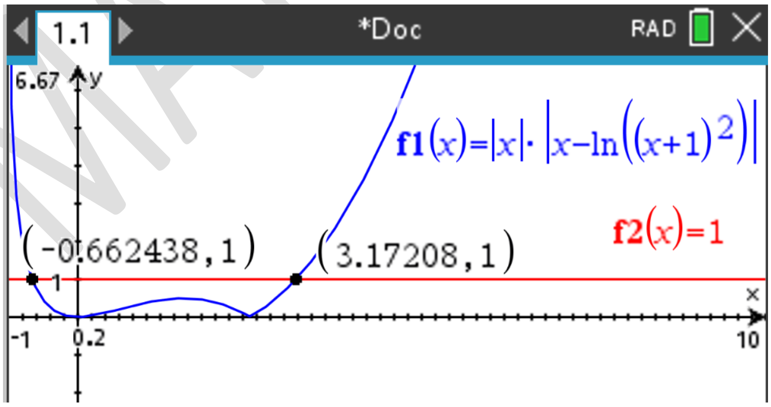
Possíveis retângulos:



$Área_{[OPQT]} = |x| \times |h(x)|$ (uma vez que tanto a abcissa de P como a sua ordenada podem ser números positivos ou números negativos, a base do retângulo é $|x|$ e a sua altura é $|h(x)|$).

Pretendemos resolver a equação $|x| \times |h(x)| = 1$, ou seja, $|x| \times \left| x - \ln\left[(x+1)^2\right] \right| = 1$.

Para isso vamos determinar a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de interseção do gráfico da função definida por $f_1(x) = |x| \times \left| x - \ln\left[(x+1)^2\right] \right|$ com a reta de equação $y = 1$ (gráfico da função f_2).



Os valores de x são, aproximadamente $-0,66$ e $3,17$.

8. Comecemos por determinar uma expressão que represente, em função de α , a área do trapézio $[OCDE]$.

$Área_{[OCDE]} = \dfrac{\overline{CD}+\overline{OE}}{2} \times \overline{ED}$

$B(2\cos\alpha, 2\operatorname{sen}\alpha)$, logo $C(-2\operatorname{sen}\alpha, -2\cos\alpha)$

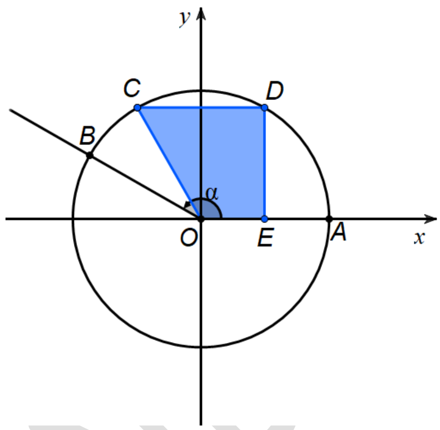
Seja F a projeção ortogonal do ponto C no eixo Oy .

$\overline{CF} = -x_C = 2\operatorname{sen}\alpha$

Como $\overline{CF} = \overline{FD}$, vem que $\overline{CD} = 4\operatorname{sen}\alpha$.

$\overline{OE} = \overline{FD} = 2\operatorname{sen}\alpha$

$\overline{DE} = y_C = -2\cos\alpha$



Assim, $Área_{[OCDE]} = \dfrac{4\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha}{2} \times (-2\cos\alpha) = 3\operatorname{sen}\alpha \times (-2\cos\alpha) = -3 \times 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = -3\operatorname{sen}(2\alpha)$

$Área_{[OCDE]} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow -3\operatorname{sen}(2\alpha) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = \dfrac{7\pi}{6} + k\times 2\pi \vee 2\alpha = \dfrac{11\pi}{6} + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \vee \alpha = \dfrac{11\pi}{12} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Como $\alpha \in \left]\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right[$, $\alpha = \dfrac{11\pi}{12}$

Note que: $\left]\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right[= \left]\dfrac{9\pi}{12}, \dfrac{12\pi}{12}\right[$

9.

9.1. Recorrendo à calculadora:

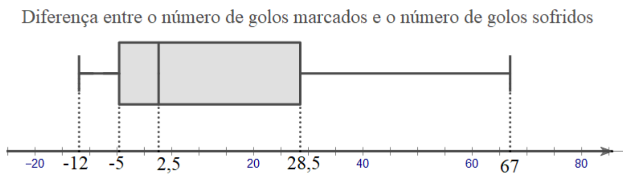
8	-4	MinX	-12.	
9	-12	Q₁X	-5.	
10	-5	MedianX...	2.5	
11	-5	Q₃X	28.5	
12	-10	MaxX	67.	

Podemos excluir a opção B uma vez que a diferença entre o terceiro quartil e a mediana $(28,5-2,5=26)$ é muito maior do que a diferença entre a mediana e o primeiro quartil $(2,5-(-5)=7,5)$ e nesse diagrama estas duas diferenças parecem aproximadamente iguais.

Podemos excluir a opção (C) uma vez que a diferença entre o valor máximo e o terceiro quartil $(67-28,5=38,5)$ é próxima da diferença entre a mediana e o valor mínimo $(28,5-(-12)=40,5)$ e nesse diagrama a primeira diferença parece muito maior.

Por fim, podemos excluir a opção (D), uma vez que a diferença entre o valor máximo e o terceiro quartil $(67-28,5=38,5)$ é claramente maior do que a diferença entre o primeiro quartil e o valor mínimo $(-5-(-12)=7)$ e nesse diagrama aparentam ser aproximadamente iguais.

Podemos também representar o diagrama de extremos e quartis e confirmar que a opção correta é a opção (A).



9.2. Recorrendo à calculadora obtemos, considerando os valores do declive e da ordenada na origem arredondados às centésimas, a seguinte equação da reta de regressão linear: $y=0,73x+45,52$

	A dif	B pontos	C	D
=				=LinRegM
1	67	90	Title	Linear R...
2	49	80	RegEqn	m*x+b
3	36	72	m	0.72900...
4	21	68	b	45.5228...
5	14	63	r²	0.92769...

Para uma equipa que tenha marcado 33 golos e tenha sofrido 53 golos o valor da variável x é -20, logo, substituindo na equação da reta obtemos $y \approx 30,92$ e, portanto, o número de pontos obtidos por essa equipa poderá ter sido 31.

* **10.** Segundo os dados do enunciado, há 42 professores apenas envolvidos com o processo de exames, 12 professores a preparar as turmas e os horários e 6 professores envolvidos noutras tarefas.

O número de casos possíveis é igual a ${}^{60}C_4$, pois é o número de maneiras de escolher simultaneamente e ao acaso 4 professores do conjunto dos 60 professores da escola.

Quanto ao número de casos favoráveis, ${}^{18}C_4$ é o número de maneiras de escolher simultaneamente 4 professores dos 18 professores que não estão envolvidos no processo de exames.

Destes ${}^{18}C_4$ conjuntos, devemos retirar os conjuntos que têm mais do que três, ou seja, quatro professores, envolvidos na preparação de turmas e horários, sendo o número desses conjuntos igual a ${}^{12}C_4$.

Assim, o número de casos favoráveis é dado por ${}^{18}C_4 - {}^{12}C_4$.

Segundo a regra de Laplace, uma vez que os acontecimentos elementares desta experiência aleatória são equiprováveis e em número finito, a probabilidade do acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis da experiência, logo a probabilidade do acontecimento é igual a $\dfrac{{}^{18}C_4 - {}^{12}C_4}{{}^{60}C_4}$.

11. Consideremos os acontecimentos:

A: «O aluno responde corretamente à alínea a» e B: «O aluno responde corretamente à alínea b»

Sabemos que:

- $P(A)=0{,}8$
- $P(B\,|\,A)=0{,}6$
- $P(B\,|\,\overline{A})=0{,}1$

A probabilidade pedida é $P(B)$.

$$P(B)=P\left((B\cap A)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\right)=P(B\cap A)+P\left(B\cap\overline{A}\right)=P(B\,|\,A)\times P(A)+P\left(B\,|\,\overline{A}\right)\times P\left(\overline{A}\right)=$$

$$=0{,}6\times 0{,}8+0{,}1\times 0{,}2=0{,}5$$

12. Como A e B são dois acontecimentos possíveis e independentes, $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

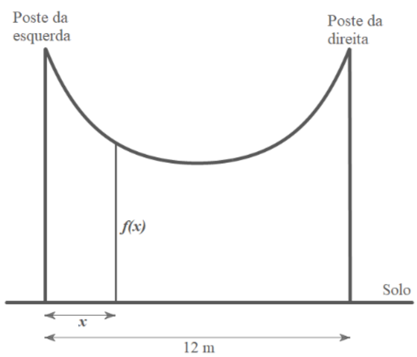
- $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=1-\dfrac{P(B)}{2}\Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-\dfrac{P(B)}{2}\Leftrightarrow \cancel{1}-P(A\cap B)=\cancel{1}-\dfrac{P(B)}{2}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\dfrac{P(B)}{2}\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow P(A)\times \cancel{P(B)}=\dfrac{\cancel{P(B)}}{2}\underset{P(B)\neq 0}{\Leftrightarrow} P(A)=\dfrac{1}{2}$

- $P(A\cup B)=\dfrac{4}{3}P(B)\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{4}{3}P(B)\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}+P(B)-\dfrac{1}{2}\times P(B)=\dfrac{4}{3}P(B)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 3+6P(B)-3\times P(B)=8P(B)\Leftrightarrow P(B)=\dfrac{3}{5}$

* **13.** Para resolver o problema vamos resolver a equação $f(x)=6{,}3$, ou seja, $\dfrac{e^{\frac{x-6}{2}}+e^{\frac{6-x}{2}}}{4}+5=6{,}3$.



$$\frac{e^{\frac{x-6}{2}}+e^{\frac{6-x}{2}}}{4}+5=6{,}3\Leftrightarrow\frac{e^{\frac{x-6}{2}}+e^{\frac{6-x}{2}}}{4}=1{,}3\Leftrightarrow e^{\frac{x-6}{2}}+e^{\frac{6-x}{2}}=5{,}2\underset{\times e^{\frac{x-6}{2}}}{\Leftrightarrow}\left(e^{\frac{x-6}{2}}\right)^2+e^{\frac{6-x}{2}}\times e^{\frac{x-6}{2}}=5{,}2\times e^{\frac{x-6}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(e^{\frac{x-6}{2}}\right)^2-5{,}2\times e^{\frac{x-6}{2}}+1=0$$

Efetuando uma mudança de variável: $y=e^{\frac{x-6}{2}}$, temos a equação $y^2-5{,}2x+1=0$.

$$y^2 - 5,2x + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5,2 \pm \sqrt{5,2^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow y = 5 \vee y = \frac{1}{5}$$

Voltando a mudar a variável, obtemos:

$$\left(e^{\frac{x-6}{2}}\right)^2 - 5,2 \times e^{\frac{x-6}{2}} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x-6}{2}} = 5 \vee e^{\frac{x-6}{2}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{x-6}{2} = \ln(5) \vee \frac{x-6}{2} = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow x = 2\ln(5) + 6 \vee x = 2\ln\left(\frac{1}{5}\right) + 6$$

A distância entre os dois pontos do cabo (uma vez que estão à mesma altura) é igual a

$$2\ln(5) \cancel{+6} - \left(2\ln\left(\frac{1}{5}\right) \cancel{+6}\right) = 2\left(\ln(5) - \ln\left(\frac{1}{5}\right)\right) = 2\ln 25 = \ln(625).$$

FIM