1.

Nº de maneiras de escolher 3 dos 7 lugares restantes, para colocar os refrigerantes diferentes.

Nº de maneiras de distribuir os 3 refrigerantes diferentes pelos 3 lugares escolhidos.

$^{12}C_5 \times {^7C_3} \times 3! = 166320$

Nº de maneiras de escolher 5 dos 12 lugares, para colocar os refrigerantes iguais. Uma vez escolhidos os 5 lugares há apenas uma forma de colocar os refrigerantes iguais.

2. Consideremos os acontecimentos:

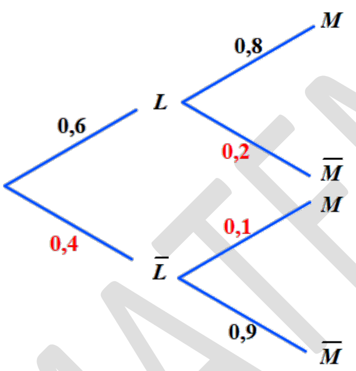
L: «O funcionário escolhido é licenciado.» e M: «O funcionário escolhido é uma mulher.»

Sabemos que:

$P(L) = 0,6$; $P(M \mid L) = 0,8$ e $P(\overline{M} \mid \overline{L}) = 0,9$

Pretendemos saber: $P(L \mid \overline{M})$

Podemos, por exemplo, elaborar um diagrama de probabilidades.



$$P(L \mid \overline{M}) = \frac{P(L \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{0,6 \times 0,2}{0,6 \times 0,2 + 0,4 \times 0,9} = \frac{0,12}{0,48} = \frac{1}{4}$$

3. Comecemos por identificar as coordenadas, em função de α, dos pontos relevantes:

$A(\cos\alpha, 0)$ e $F(\cos\alpha, sen\alpha)$.

$Área_{[OCBFED]} = Área_{[OCBA]} - Área_{[DEFA]} = \overline{OA}^2 - \overline{AF}^2$ Como $\overline{OA} = \cos\alpha$ e $\overline{AF} = -sen\alpha$, vem que:

$Área_{[OCBFED]} = (\cos\alpha)^2 - (-sen\alpha)^2 = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = \cos(2\alpha)$

4.

4.1. Uma vez que a reta tangente é perpendicular à reta r, o seu declive é igual a $-\frac{1}{2}$.

Uma vez que a abcissa do ponto A pertence ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$, será a solução, pertencente a este intervalo, da equação $sen(2x)=-\frac{1}{2}$.

Seja $x\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$.

$$f'(x)=\left(-\cos^2 x-1\right)'=-2\times\cos x\times(-senx)-0=$$
$$=2senx\cos x=sen(2x)$$

$$sen(2x)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi\vee 2x=\frac{7\pi}{6}+k\times 2\pi,\,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\vee x=\frac{7\pi}{12}+k\pi,\,k\in\mathbb{Z}$. Para $k=0$, vem $x=-\frac{\pi}{12}\vee x=\frac{7\pi}{12}$

Resposta: Como $-\frac{\pi}{12}\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$,a abcissa do ponto A é $-\frac{\pi}{12}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\cos^2 x-1\right)=-1^2-1=-2$

$f(0)=-2$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen(2x+\pi)}{e^{2x}-e^x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-sen(2x)}{2x}}{\frac{e^{2x}-e^x}{2x}}=\frac{-\underbrace{\boxed{\lim\limits_{2x\to 0^+}\frac{sen(2x)}{2x}}}_{\text{Limite notável}}}{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x\left(e^x-1\right)}{2x}}=\frac{-1}{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x}{2}\times\underbrace{\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}}}_{\text{Limite notável}}}=\frac{-1}{\frac{e^0}{2}\times 1}=-2$$

Uma vez que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, a função f é contínua em $x=0$.

5.

5.1. $g'(x)=\left(\ln\left(e^x+x\right)-x\right)'=\left(\ln\left(e^x+x\right)\right)'-x'=\frac{\left(e^x+x\right)'}{e^x+x}-1=\frac{e^x+1}{e^x+x}-1=\frac{e^x+1-e^x-x}{e^x+x}=\frac{1-x}{e^x+x}$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-x}{e^x+x}=0\Leftrightarrow 1-x=0\wedge\underbrace{e^x+x\neq 0}_{\text{condição universal}}\Leftrightarrow x=1$$

x	0		1	$+\infty$
Zeros e sinal de g'	n.d.	$+$	0	$-$
Variação e extremos de g	n.d.	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$

$g(1)=\ln(e+1)-1=\ln(e+1)-\ln(e)=\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)$ é o máximo absoluto da função.

5.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x+x\right)-x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x\right)+\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)-x\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}+\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\cancel{-x}\right)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)=\ln(1+0)=0$$

<u>Ou</u>

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x+x\right)-x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x+x\right)-\ln\left(e^x\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x+x}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)=\ln(1+0)=0$$

Resposta: A reta de equação $y=0$ é a assíntota horizontal do gráfico de g.

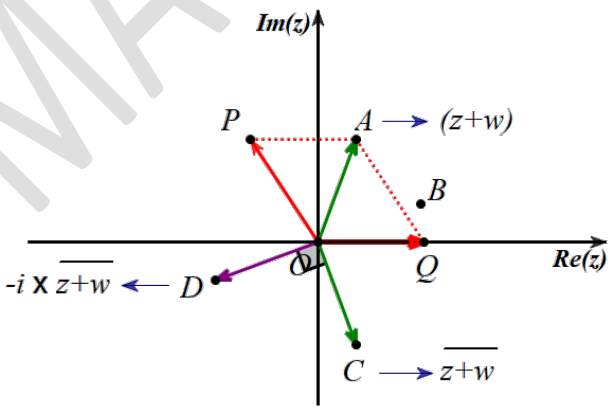
6. $\lim(u_n)=\lim\frac{\ln(n)}{n}=0^+$

Atendendo ao limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

$$\lim\left(h\left(u_n\right)\right)=\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x^3e^{\frac{1}{x}}\right)\overset{(0\times\infty)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^3}}=\underbrace{\boxed{\lim_{\frac{1}{x}\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^3}}}_{\text{limite notável}}=+\infty$$

Este exercício podia também ser resolvido por observação do gráfico da função h na calculadora gráfica.

7.



8. $z_1 = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} - 2\sqrt{3}\,i^{8n+1} = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) - 2\sqrt{3}\times i^{8n}\times i =$

$= 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - 2\sqrt{3}\times\left(i^4\right)^{2n}\times i = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\sqrt{3}\times(1)^{2n}\times i =$

$= -1 + i\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\times 1\times i = -1 + i\sqrt{3} - 2\sqrt{3}i = -1 - i\sqrt{3}$

Seja $-1-\sqrt{3}i = \rho e^{i\theta}$

$\rho = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$tg(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$ e $\theta \in 3^{\text{o}}\,\text{Quadrante}$, logo $\theta = \frac{4\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $-1-\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

$\overline{z_2} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$

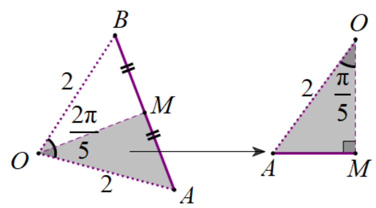
$w = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \times 3e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)} = 6e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)} = 6e^{i\left(\frac{17\pi}{15}\right)}$

> Em vez de $\frac{4\pi}{3}$ podíamos ter escrito $-\frac{2\pi}{3}$ e, nesse caso, $w = 6e^{i\left(-\frac{13\pi}{15}\right)}$.
> Devemos apresentar desta forma se for pedido o argumento principal do complexo w. Se nada for dito qualquer uma das formas está correta.

9. Uma vez que $z_0 = 2e^{i\alpha}$ é uma das raízes quintas (ou raízes de ordem 5) do número complexo z, o seu afixo, A, é um dos vértices de um pentágono regular inscrito numa circunferência de raio 2 centrada na origem do referencial.

$z_1 = 2e^{i\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)}$ é a raiz quinta de z cujo afixo, B, é um vértice consecutivo de A no referido pentágono. Assim, $[OAB]$ é um triângulo isósceles, sendo $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{5}$.

Seja M o ponto médio de $[AB]$.



Por observação da figura ao lado vemos que $sen\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\overline{AM}}{2}$, logo $\overline{AM} = 2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)$ e, portanto o lado do pentágono é $4sen\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Assim, o perímetro do pentágono é $5\times 4sen\left(\frac{\pi}{5}\right)$, ou seja, $20sen\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

10. $\left(-sen\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^n=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)+isen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)\right)^n=\left(\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)+isen\left(\frac{9\pi}{14}\right)\right)^n=\left(e^{i\left(\frac{9\pi}{14}\right)}\right)^n=e^{i\left(\frac{9\pi}{14}\times n\right)}$

Para que o número complexo seja um número real positivo, $\frac{9\pi}{14}\times n=k\times 2\pi,\, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 9\pi\times n=14k\times 2\pi,\, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=\frac{14k\times 2\cancel{\pi}}{9\cancel{\pi}},\, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=\frac{28k}{9},\, k\in\mathbb{Z}$

Como 28 não é múltiplo de 9, para que $\frac{28k}{9}$ seja um número natural, k tem de ser múltiplo de 9 e, assim, o menor número natural n é 28, correspondente a $k=9$.

11. $V=C+\overrightarrow{CV}$ e é então necessário conhecer as coordenadas do ponto C e do vetor $\overrightarrow{CV}$.

Uma vez que o ponto C pertence ao eixo das cotas, as suas coordenadas são do tipo $(0,0,c)$ e, como C pertence ao plano α, $4\times 0-5\times 0+3c=6\Leftrightarrow c=2$. Assim, $C(0,0,2)$.

O vetor $\overrightarrow{CV}$ é um vetor perpendicular ao plano α, logo é colinear com $\vec{n}_\alpha=(4,-5,3)$, e cuja norma é igual à altura do cone.

É então necessário determinar a altura do cone.

Como conhecemos o volume do cone, vem que $80\pi\sqrt{2}=\frac{1}{3}\times\pi\times r^2\times h$, logo, para determinar a altura, é necessário conhecer o raio da base do cone.

O raio da base do cone é igual a $\overline{AC}=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{24}$.

Obtemos assim: $80\pi\sqrt{2}=\frac{1}{3}\times\pi\times\sqrt{24}^2\times h\Leftrightarrow 80\pi\sqrt{2}=8\pi\times h\Leftrightarrow\frac{80\pi\sqrt{2}}{8\pi}=h\Leftrightarrow h=10\sqrt{2}$.

Sabemos então que $\left\|\overrightarrow{CV}\right\|=10\sqrt{2}$ e $\overrightarrow{CV}=k(4,-5,3)$ para um certo valor de k.

A partir daqui há vários processos para determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{CV}$.

<u>1º processo:</u>

$$\left\|\overrightarrow{CV}\right\|=10\sqrt{2}\Leftrightarrow\left\|(4k,-5k,3k)\right\|=10\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{(4k)^2+(-5k)^2+(3k)^2}=10\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{16k^2+25k^2+9k^2}\right)^2=\left(10\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow 16k^2+25k^2+9k^2=200\Leftrightarrow 50k^2=200\Leftrightarrow k^2=4\Leftrightarrow k=\pm 2$$

Se $k=-2$, $\overrightarrow{CV}=(-8,10,-6)$ e $V=(0,0,2)+(-8,10,-6)\Leftrightarrow V=(-8,10,-4)$, que não pertence ao quarto octante.

Se $k=2$, $\overrightarrow{CV}=(8,-10,6)$ e $V=(0,0,2)+(8,-10,6)\Leftrightarrow V=(8,-10,8)$, que pertence ao quarto octante, logo são estas as coordenadas do vértice V.

<u>2º processo:</u>

$$\left\|\overrightarrow{CV}\right\|=10\sqrt{2}\Leftrightarrow\left\|k(4,-5,3)\right\|=10\sqrt{2}\Leftrightarrow|k|\times\left\|(4,-5,3)\right\|=10\sqrt{2}\Leftrightarrow|k|\sqrt{4^2+(-5)^2+3^2}=10\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|k|\times\sqrt{50}=10\sqrt{2}\Leftrightarrow|k|=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{50}}\Leftrightarrow|k|=\frac{10\cancel{\sqrt{2}}}{5\cancel{\sqrt{2}}}\Leftrightarrow|k|=2\Leftrightarrow k=\pm2$$ (A partir daqui o trabalho a desenvolver é o mesmo)

FIM