1. Uma caixa contém 10 bolas do mesmo tamanho, indistinguíveis ao tato: quatro azuis, duas brancas, três pretas e uma vermelha.

1.1. As dez bolas vão ser retiradas, sucessivamente e ao acaso, da caixa e dispostas sobre uma mesa, alinhadas pela ordem em que são retiradas.

Determine a probabilidade das bolas azuis ficarem todas juntas.

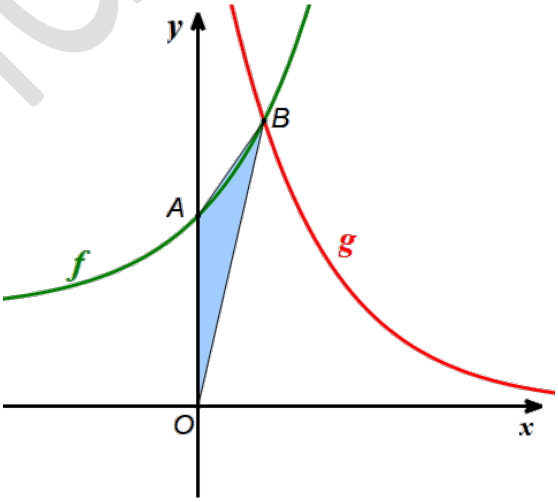
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

1.2. Suponha agora que foram colocadas mais algumas bolas azuis na caixa.

Vão ser retiradas ao acaso duas bolas da caixa, uma a seguir à outra, sem repor a primeira antes de retirar a segunda.

Sabendo que a probabilidade de saírem bolas de cores diferentes é igual a $\frac{13}{21}$ determine o número de bolas azuis acrescentadas.

2. No referencial o.n. da figura ao lado estão representadas partes dos gráficos das funções, reais de variável real, f e g e o triângulo $[AOB]$.



Sabe-se que:

- $f(x) = e^x + 1$
- $g(x) = 6e^{-x}$
- o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas;
- o ponto B é o ponto de interseção dos gráficos das funções f e g.

2.1. Sem recorrer à calculadora determine a área do triângulo $[AOB]$.

2.2. Seja a um número real positivo.

2.2.1. Qual é, em função de a, o valor do limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(ax) - 2}{x^2 - a^2 x}$?

(A) a **(B)** $-a$ **(C)** $\frac{1}{a}$ **(D)** $-\frac{1}{a}$

2.2.2. Seja C o ponto de abcissa $\ln(a)$, pertencente ao gráfico da função g.

Qual é o declive da reta tangente ao gráfico da função g no ponto C?

(A) $\frac{6}{a}$ **(B)** $-\frac{6}{a}$ **(C)** $6-a$ **(D)** $a-6$

3. Seja f a função, de domínio $]2,+\infty[$, definida por $f(x)=4x-3\ln(x-2)$.

3.1. Sem recorrer à calculadora estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais e de assíntotas oblíquas ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

3.2. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n=\dfrac{1}{\ln\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n\right]}$.

A que é igual $\lim f(u_n)$?

(A) $+\infty$ **(B)** $-\infty$ **(C)** 12 **(D)** e

3.3. Seja h a função definida por $h(x)=f(x)-4x$.

Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função h^{-1}, função inversa de h?

(A) $e^{-\frac{x}{3}}+2$ **(B)** $e^{\frac{x}{3}}+2$ **(C)** $\frac{e^x}{3}+2$ **(D)** $-\frac{e^x}{3}+2$

4. Considere a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x} & \text{se } x<0\\ 0 & \text{se } x=0\\ -x\ln(x)+x^3 & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

4.1. Averigue se a função g é contínua em $x=0$.

4.2. Estude a função g quanto ao sentido da concavidade do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $]0,+\infty[$.

Na sua resposta, apresente:

— o(s) intervalo (s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo;

— o(s) intervalo (s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima;

— a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

5. A equação $\ln\left(\left(1+e^{2x}\right)\times e^{x-1}\right)=x$ tem, em $\mathbb{R}$, uma única solução.

Determine essa solução e apresente-a na forma $-\ln(k)$, com $k>0$.

6. Seja f uma função, diferenciável em $\mathbb{R}$, cujo gráfico interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 1.

Sabe-se que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{1-\sqrt{x}}=3$.

Qual é o valor de $f'(1)$?

(A) $\dfrac{3}{2}$ **(B)** $-\dfrac{3}{2}$ **(C)** 6 **(D)** -6

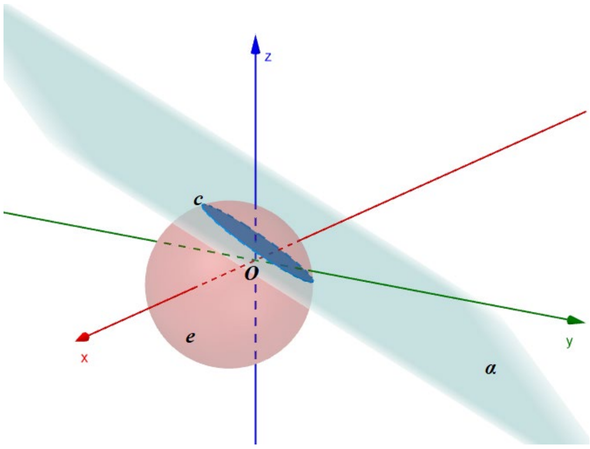
7. Na figura ao lado estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, a esfera e e o plano α.

Como a figura sugere, a interseção da esfera e com o plano α é o círculo c.

Sabe-se que:

- $e:(x-4)^2+(y+2)^2+(z+3)^2\leq 150$
- $\alpha:-x+y+2z-6=0$

Determine o valor exato da área do círculo c.



Sugestão: Comece por determinar a distância do centro da esfera ao plano.

FIM