1.

1.1. Seja $S_1: x^2+y^2+z^2-4x-20y-4z=0$ a superfície esférica de centro no ponto I e que contém os vértices da base da pirâmide.

1.1.1. $x^2+y^2+z^2-4x-20y-4z=0 \Leftrightarrow x^2-4x+.....+y^2-20y+.....+z^2-4z+.....=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x+2^2+y^2-20y+10^2+z^2-4z+2^2=0+2^2+10^2+2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-10)^2+(z-2)^2=108$

O centro da superfície esférica é o ponto $I(2,10,2)$.

A projeção ortogonal do ponto I no plano COG é o centro da face $[COGF]$, ou seja, o ponto H, logo $H(2,0,2)$ e, portanto a aresta do cubo é igual a 4.

1.1.2. O plano paralelo a xOz e que contém o ponto de coordenadas $(-4,2,18)$ tem de equação $y=2$.

A interseção da superfície esférica com o plano pode ser representada pelo sistema

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-10)^2+(z-2)^2=108\\ y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(2-10)^2+(z-2)^2=108\\ y=2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+64+(z-2)^2=108\\ y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(z-2)^2=108-64\\ y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(z-2)^2=44\\ y=2\end{cases}$$

Trata-se, portanto de uma circunferência de centro no ponto de coordenadas $(2,2,2)$ e raio $\sqrt{44}$, contida no plano de equação $y=2$.

O perímetro da circunferência é, portanto, igual a $2\sqrt{44}\,\pi$, ou seja, $4\sqrt{11}\,\pi$.

1.1.3. Para determinar as coordenadas dos pontos P e Q podemos resolver o sistema formado pela equação da superfície esférica e pela condição cartesiana que define a reta.

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-10)^2+(z-2)^2=108\\ \boxed{\begin{matrix}y=3\\ z=1\end{matrix}} \leftarrow \text{A reta é definida por } y=3 \wedge z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(3-10)^2+(1-2)^2=108\\ y=3\\ z=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2=108-49-1\\ y=3\\ z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2=58\\ y=3\\ z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=\sqrt{58}\\ y=3\\ z=1\end{cases} \vee \begin{cases}x-2=-\sqrt{58}\\ y=3\\ z=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+\sqrt{58} \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2-\sqrt{58} \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Os pontos de interseção são os pontos $P\left(2+\sqrt{58},3,1\right)$ e $Q\left(2-\sqrt{58},3,1\right)$.

$\overline{PQ} = \left|2+\sqrt{58}-\left(2-\sqrt{58}\right)\right| = 2\times\sqrt{58} = 4\sqrt{13}$ (Uma vez que os pontos apenas diferem na abcissa, para calcular a sua distância basta calcular o módulo da diferença entre as abcissas, no entanto podes também aplicar a fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos no espaço).

1.2.

1.2.1. $E'\left(-4,-4,-4\right)$; **1.2.2.** $E''\left(4,16,4\right)$

1.3. A superfície esférica inscrita no cubo tem centro no centro geométrico do cubo, ou seja, por exemplo, no ponto médio de $\left[EO\right]$ e raio igual a metade da aresta do cubo, ou seja, 2.

Como $E\left(4,-4,4\right)$, o centro da superfície esférica tem coordenadas $\left(2,-2,2\right)$.

A equação cartesiana reduzida da superfície esférica é $\left(x-2\right)^2+\left(y+2\right)^2+\left(z-2\right)^2=4$.

1.4. A superfície esférica circunscrita ao cubo tem centro no mesmo ponto da superfície esférica da alínea anterior, ou seja, o ponto de coordenadas $\left(2,-2,2\right)$.

O diâmetro da superfície esférica é igual à diagonal espacial do cubo, ou seja, $\overline{EO}$.

$\overline{EO} = \sqrt{\left(4-0\right)^2+\left(-4-0\right)^2+\left(4-0\right)^2} = \sqrt{3\times16} = 4\sqrt{3}$

O raio é metade do diâmetro, logo é igual a $2\sqrt{3}$.

> **Nota:** Atendendo a que a diagonal espacial de um cubo de aresta a é igual a $\sqrt{3}\,a$, podíamos ter calculado desta forma.

A equação da superfície esférica pedida é então: $\left(x-2\right)^2+\left(y+2\right)^2+\left(z-2\right)^2=12$

1.5. Atendendo a que $B\left(4,-4,0\right)$ e $G\left(0,0,4\right)$, vem que o plano mediador de $\left[BG\right]$ pode ser definido por:

$$\left(x-4\right)^2+\left(y+4\right)^2+\left(z-0\right)^2=\left(x-0\right)^2+\left(y-0\right)^2+\left(z-4\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}+8y+\cancel{16}+\cancel{z^2}=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}-8z+\cancel{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8x+8y+8z+16=0 \Leftrightarrow -x+y+z+2=0$$

1.6. Uma vez que S_3 tem como centro o ponto médio de $[EO]$, que é também o ponto médio de $[BG]$, como esse ponto está, por definição de ponto médio, à mesma distância de B e de G, pertence ao plano mediador de $[BG]$.

2. Para determinar as coordenadas dos pontos de intersecção do plano α com os eixos coordenados basta resolver os sistemas formados pela equação do plano e pelas condições cartesianas que definem cada um dos eixos.

Intersecção com o eixo Ox : $\begin{cases} x+y+z=6 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+0+0=6 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $X(6,0,0)$

Intersecção com o eixo Oy : $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0+y+0=6 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$ $Y(0,6,0)$

Intersecção com o eixo Oz : $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0+0+z=6 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=6 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $Z(0,0,6)$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_{base} \times altura \Leftrightarrow V_{pirâmide} = \frac{10}{3} A_{base}$$

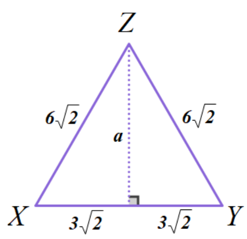
Para determinar a área da base vamos começar por classificar o triângulo $[XYZ]$.

$$\overline{XY} = \sqrt{(6-0)^2 + (0-6)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2 \times 36} = 6\sqrt{2}$$

$$\overline{XZ} = \sqrt{(6-0)^2 + (0-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{2 \times 36} = 6\sqrt{2}$$

$$\overline{YZ} = \sqrt{(0-0)^2 + (6-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{2 \times 36} = 6\sqrt{2}$$

Assim, vemos que o triângulo $[XYZ]$ é um triângulo equilátero de lado $6\sqrt{2}$.



Aplicando o Teorema de Pitágoras vem que:

$$a^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 = 72 - 18 \Leftrightarrow a^2 = 54 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{54}$$

Como se trata de um comprimento, $a > 0$, logo $a = 3\sqrt{6}$.
Logo,

$$V_{pirâmide} = \frac{10}{\cancel{3}} \times \frac{6\sqrt{2} \times \cancel{3}\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow V_{pirâmide} = \frac{60\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow V_{pirâmide} = \frac{60 \times 2 \times \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow V_{pirâmide} = 60\sqrt{3}$$