COLÉGIO PAULO VI

Ficha de Trabalho **Matemática** **12ºano**

Temas: Trigonometria (Triângulo rectângulo e círculo trigonométrico)

Proposta de correcção

1. Relembrar que um radiano é, em qualquer circunferência, a amplitude do arco que têm comprimento igual ao raio. Sendo assim se o raio da circunferência é 2,5 cm , então um arco de comprimento 2,5 cm tem de amplitude 1 radiano e portanto um arco de comprimento $3\times 2{,}5\ cm$ tem de amplitude $3\ rad$. (C)

2. Relembrar que os ângulos α e $\alpha + k\times 360^{o}, k\in Z$ têm a mesma representação no círculo trigonométrico, assim como α e $\alpha + k\times 2\pi, k\in Z$ se a unidade for o radiano. Sendo assim, como $-315^{o} = 405^{o} - 2\times 360^{o}$, os ângulos de amplitudes -315^{o} e 405^{o} têm a mesma representação no círculo trigonométrico. (A)

3. Relembrar a tabela de valores exactos das razões trigonométricas dos ângulos de amplitudes $\frac{\pi}{6}\,rad\quad (30^{o})$, $\frac{\pi}{4}\,rad\quad (45^{o})$ e $\frac{\pi}{3}\,rad\quad (60^{o})$ e os ângulos que têm o mesmo seno.

   Em primeiro lugar temos que identificar um ângulo, no intervalo $[0,2\pi[$, que tenha a mesma representação de $\frac{100}{6}\pi\ rad$.

   Dividindo 100 por 6 obtemos $100 = 6\times 16 + 4$ logo $\frac{100}{6} = \frac{6\times 16}{6} + \frac{4}{6}$ e portanto

   $\frac{100}{6}\pi = 16\pi + \frac{4}{6}\pi$ ou seja $\frac{100}{6}\pi$ tem a mesma representação que $\frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$

   (Uma vez que $16\pi = 8\times 2\pi$)

   Então $sen\left(\frac{100\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{2}{3}\pi\right) = sen\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (A)

4. **A afirmação verdadeira é (A)** uma vez que no 2º quadrante o cosseno é negativo e a tangente é negativa logo o seu produto é positivo.
   (B) É falsa pois no 3º quadrante o seno e o cosseno são negativos.
   (C) É falsa porque $-1 \le \cos x \le 1\ \forall x\in R$.
   (D) É falsa. Basta fazer $tg^{-1}(5)\approx 1{,}37 rad$ ou lembrar que o contradomínio da função tangente é IR.

5. As coordenadas do ponto P, recorrendo ao ângulo α que define no círculo trigonométrico, são $(\cos\alpha; sen\alpha)$. Sendo assim as coordenadas de P são
   $\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right); sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

Como $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sen\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, as coordenadas de P são, neste caso,

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ (D).

6. (A) Falsa.

Relembrar a fórmula fundamental da trigonometria, $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{9} = 1$. Como a afirmação anterior é falsa não existe nenhum ângulo que satisfaça a relação dada.

(B) Verdadeira.

Uma vez que $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, para os valores para os quais está definida, se $sen\alpha \cdot \cos\alpha > o$ então $tg\alpha > 0$

(C) Falsa.

Relembrar que a função tangente é crescente em cada intervalo do seu domínio, mas não é crescente no seu domínio. Basta considerar *a* um ângulo do 1º quadrante e *b* um ângulo do segundo quadrante e $a < b$ mas $tga > tgb$.

7.

7.1 $sen210º + \cos150º + tg300º = sen(180º+30º) + \cos(180º-30º) + tg(360º-60º) =$
$= -sen(30º) - \cos(30º) - tg(60º) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \frac{-1-\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-3\sqrt{3}}{2}$

7.2 $sen\left(\frac{5\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{4}{3}\pi\right) \cdot tg\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) - sen\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cdot tg\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$
$= sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\sqrt{3}\right) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

7.3 $\cos(540º) - 2\cos(30º) + sen(-135º) =$
$= \cos(360º+180º) - 2\cos(30º) - sen(135º) =$
$= \cos(180º) - 2\cos(30º) - sen(180º-45º) =$
$= -1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - sen(45º) = -1 - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-2-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

7.4 $2\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + tg\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(2\pi) + tg\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) =$
$= -2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - tg\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1 + 1 + tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = = -2 \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. Relembrar que ao dividir um **hexágono regular** em triângulos, formados por dois vértices consecutivos e pelo centro, obtemos triângulos equiláteros, logo cada um dos ângulos internos desses triângulos tem de amplitude 60º.

8.1 $sen A\hat{O}B = sen 60º = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8.2 $\cos A\hat{O}C = \cos(120º) = \cos(180º - 60º) = -\cos(60º) = -\frac{1}{2}$

8.3 $tg A\hat{O}E = tg(180º + 60º) = tg(60º) = \sqrt{3}$

9.

9.1 Seguindo as indicações do enunciado obtemos um triângulo rectângulo cujo cateto adjacente ao ângulo de 25º mede 7 metros.
Para determinar o outro cateto e a hipotenusa temos que recorrer às razões trigonométricas.
Relembrar que, sendo α um ângulo agudo de um triângulo rectângulo,

$$sen\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa},\ \cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}\ \text{e}\ tg\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Então: $\cos 25º = \frac{7}{x} \Leftrightarrow x = \frac{7}{\cos 25º}$ e $tg 25º = \frac{y}{7} \Leftrightarrow y = 7tg25º$

A altura do poste é, então, dada por $\frac{7}{\cos 25º} + 7tg25º$ que é aproximadamente 11.

A afirmação é falsa.

9.2 $-2350º = -6 \times 360º - 190º$ logo o ângulo de amplitude -2350º tem a mesma representação do ângulo de amplitude -190º e portanto pertence ao 2º quadrante.
A afirmação é verdadeira.

9.3 Se $sen\alpha \cdot \cos\alpha < 0$ então α pertence ao 2º ou ao 4º quadrante. Uma vez que o seno é decrescente o ângulo α pertence ao 2º quadrante. Nesse quadrante, a tangente é negativa.
A afirmação é falsa.

10. $\cos(x-\pi) - \cos(3\pi - x) + sen\left(-\frac{5\pi}{2} + x\right) = -\cos(x) - \cos(2\pi + \pi - x) + sen\left(-2\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) =$

$= -\cos(x) - \cos(\pi - x) + sen\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x - (-\cos x) - \cos x = -\cos x + \cos x - \cos x = -\cos x$

$2\cos\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) - sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \times tg(7\pi + x) - 3sen(5\pi + x) =$

$= 2\cos\left(4\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(x) \times tg(x) - 3sen(4\pi + \pi + x) =$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(x) \times tg(x) - 3sen(\pi + x) =$$

$$= 2sen(x) - \cos(x) \times \frac{senx}{\cos x} - 3(-sen(x)) = = 2sen(x) - sen(x) + 3sen(x) =$$

$$= 4sen(x)$$

12. Em primeiro lugar devemos escrever a expressão dada à custa das razões trigonométricas do ângulo β.

$$2sen(\pi + \beta) + \cos(2\pi - \beta) = 2(-sen(\beta)) + \cos(\beta) = -2sen\beta + \cos\beta$$

Então só temos que determinar o valor exacto de $sen\beta$.

Recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria,

$$sen^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow sen^2\beta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow sen^2\beta = \frac{16}{25} \Leftrightarrow sen\beta = \pm\frac{4}{5}$$

Uma vez que $-\pi < \beta < 0$, $sen\beta = -\frac{4}{5}$ logo $-2sen\beta + \cos\beta = -\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$

13. $2senx = -\sqrt{3} \Leftrightarrow senx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow senx = sen\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$$x = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + k \times 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + k \times 2\pi \quad k \in Z$$

$k = 0 \qquad x = -\frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{4\pi}{3}$

$k = 1 \qquad x = \frac{5\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{10\pi}{3} (não \quad pertence \quad ao \quad \text{int}ervalo)$

$k = 2 \qquad x = \frac{11\pi}{3} (não \quad pertence \quad ao \quad \text{int}ervalo) \quad \vee \quad ----$

$k = -1 \qquad x = -\frac{7\pi}{3} (não \quad pertence \quad ao \quad \text{int}ervalo) \quad \vee \quad x = -\frac{2\pi}{3}$

$k = -2 \qquad ---- \quad \vee \quad x = -\frac{8\pi}{3} (não \quad pertence \quad ao \quad \text{int}ervalo)$

As soluções pertencentes ao intervalo $[-\pi, 2\pi]$ são: $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$

14.

14.1

$$2senx = \sqrt{3} \Leftrightarrow senx = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow senx = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \quad k \in Z$$

14.2 $tgx = -\sqrt{3} = tgx = tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in Z$

14.3

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow -senx=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow senx=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow senx=sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi \vee x=\pi-\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+k\times 2\pi \quad k\in Z$$

15. $sen\beta=0\Leftrightarrow \beta=k\pi \quad k\in Z$ (B)

16. (A) $d(\alpha)=1+\cos\alpha$

17. Sendo $senx=-\frac{1}{3}$, qual das afirmações é verdadeira?

$sen(\pi+x)=-senx=\frac{1}{3}$ Logo (A) é falsa.

$sen^2x+\cos^2 x=1\Leftrightarrow \frac{1}{9}+\cos^2 x=1\Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{8}}{3}$ Logo (B) é falsa.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-senx=\frac{1}{3}$ Logo (C) é falsa.

$sen(\pi-x)=senx=-\frac{1}{3}$ Logo (D) é verdadeira.

18.

$sen(45^o)+\cos(45^o)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ (A) é verdadeira.

$sen(90^o-\alpha)-\cos\alpha=\cos\alpha-\cos\alpha=0$ (B) é verdadeira.

$tg(135^o)=tg(180^o-45^o)=-tg45^o=-1$ (C) é falsa.

$tg(30^o)+\frac{1}{tg(60^o)}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=2\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) é verdadeira.

19. Seja $\alpha=M\hat{B}C$. Uma vez que o triângulo [BMC] é rectângulo, podemos determinar α recorrendo à sua tangente.

$tg\alpha=\frac{2,5}{5}\Leftrightarrow tg\alpha=0,5$ logo $\alpha=tg^{-1}(0,5)$.

Uma vez que $N\hat{B}A=M\hat{B}C$, $\theta=90^o-2\times tg^{-1}(0,5)$ e portanto, aproximando às unidades, $\theta\approx 37^o$.

20. $sen\alpha=\frac{\overline{BC}}{3}\Leftrightarrow \overline{BC}=3sen\alpha$

$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}}{3}\Leftrightarrow \overline{AB}=3\cos\alpha$

$P_{[ABC]}=3sen\alpha+3\cos\alpha+3$ Na figura está