



Teste 4 (1ª parte)

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos | 5.05.2011

12.º Ano de Escolaridade

Observação:

- Este teste é constituído por duas partes.
- Esta é a primeira parte e tem um peso de 85% (17 valores).
- A segunda parte será realizada no dia 6 de Junho e terá um peso de 15% (3 valores) e avaliará apenas o capítulo “ Números Complexos”

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \text{cos } b + \text{sen } b \cdot \text{cos } a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cdot \text{cos } b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Extraem-se sucessivamente e sem reposição, duas cartas de um baralho de 40 cartas.

Seja X a variável aleatória que representa o número de reis que se obtêm. Em qual das seguintes tabelas está representada uma distribuição de probabilidades da variável X ?

(A)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{26}$	$\frac{12}{65}$	$\frac{1}{130}$

(B)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{26}$	$\frac{6}{65}$	$\frac{1}{130}$

(C)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{63}{80}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{3}{400}$

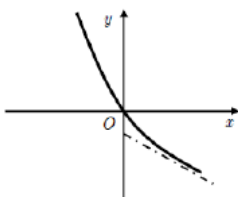
(D)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{40}$

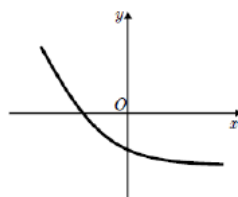
2. Considere uma função g , derivável em \mathbb{R} , e em que $g'(0) \times g''(0) < 0$.

Qual dos gráficos seguintes **não pode** representar o gráfico da função g ?

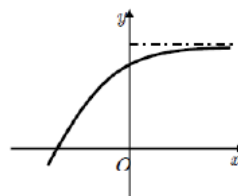
(A)



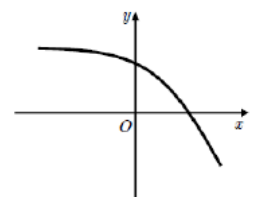
(B)



(C)



(D)



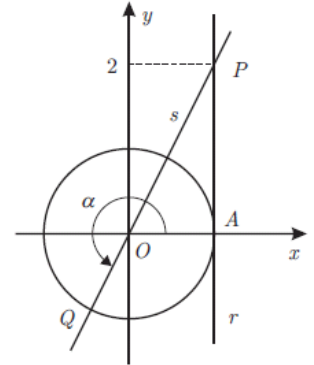
$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+e) & \text{se } x \geq k \\ e^{-x} & \text{se } x < k \end{cases}$$

3. A função real de variável real definida por
é contínua em $x = k$ se:

(A) $k = -e$ (B) $k = 1$ (C) $k = 0$ (D) $k = e$

4. Na figura, está representado o círculo trigonométrico.
Sabe-se que:

- a recta r é tangente à circunferência no ponto $A(1,0)$
- a recta s passa na origem do referencial e intersecta a recta r no ponto P , cuja ordenada é 2.
- o ponto Q , situado no terceiro quadrante, pertence à recta s .



Seja α a amplitude, **em radianos**, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semi-eixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta OQ .

Qual é o valor de α arredondado às centésimas?

- (A) 4,23
(B) 4,25
(C) 4,27
(D) 4,29
5. Considere, em \mathbb{R} , a equação trigonométrica $\cos x = 0,9$.
Em qual dos intervalos seguintes esta equação não tem solução?

(A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $[0, \pi]$ (C) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ (D) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exacto.

1. Um jovem costuma ir a pé para a escola, mas, às vezes, vai de carro com os pais.

Sabe-se que:

- 80% das vezes vai a pé;
- a probabilidade de chegar atrasado é 20%;
- se for a pé, a probabilidade de chegar atrasado é de 15%.

Determina a probabilidade de o jovem:

- 1.1 Chegar atrasado, sabendo-se que foi de carro.

- 1.2 Não chegar atrasado, sabendo-se que foi a pé.

2. Considere a função, de domínio R^+ , definida por $f(x) = 2x + \frac{\ln x}{x}$.

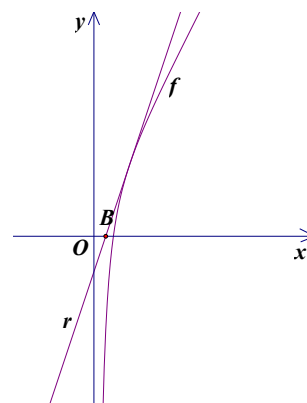
Resolva, usando exclusivamente métodos analíticos as alíneas 2.1, 2.2 e 2.3.

- 2.1 Estude a função quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

- 2.2 Mostre que $f'(x) = \frac{2x^2 - \ln x + 1}{x^2}$.

- 2.3 Considere o referencial o.n. xOy ao lado em que estão representados:

- parte do gráfico de f ;
- a recta t , tangente ao gráfico de f no ponto A, de abcissa 1;
- o ponto B, de intersecção da recta t com o eixo Ox .



Determine a abcissa de B.

- 2.4 Recorrendo à função f' e às capacidades gráficas da calculadora, determine o valor de a tal que $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0, a[$.

Reproduza na sua folha de respostas o(s) gráfico(s) obtido(s) na calculadora e apresente o valor de a arredondado às centésimas.

Numa **breve** composição explique o seu raciocínio.

3. Considere a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = 1 - \cos(2x) + 2\operatorname{sen}x$.

3.1 Mostre que $g(x) = 2\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x + 1)$

3.2 Determine os zeros de g pertencentes ao intervalo $[-\pi, \pi]$.

3.3 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I(5 x 10 pontos) 50 pontos

Grupo II.....120 pontos

1. 20 pontos

1.1 10 pontos

1.2 10 pontos

2. 60 pontos

2.1 15 pontos

2.2 15 pontos

2.3 15 pontos

2.4 15 pontos

3. 40 pontos

3.1 15 pontos

3.2 15 pontos

3.3 10 pontos

Total 170 pontos