COLÉGIO PAULO VI

Ficha de Avaliação

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos | 6.12.2012

12.º Ano de Escolaridade

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

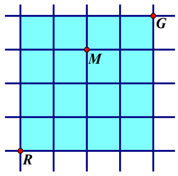
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. A figura representa parte da planta das ruas de uma cidade.



R – Casa do Rui

M – Casa da Mónica

G – Ginásio

O Rui e a Mónica, quando vão de casa para o Ginásio, utilizam as ruas só no sentido Oeste – Este e Sul – Norte.

O Rui, numa deslocação de casa para o Ginásio, escolhe o percurso ao acaso.

Quantos são os caminhos possíveis de casa do Rui até ao Ginásio, passando por casa da Mónica?

(A) ${}^{8}C_{5} \times {}^{8}C_{3}$ **(B)** ${}^{8}C_{2} \times {}^{8}C_{1}$ **(C)** ${}^{5}C_{2} \times {}^{3}C_{1}$ **(D)** ${}^{5}C_{2} + {}^{3}C_{1}$

2. No desenvolvimento de $(x+y)^n$ verificou-se que o coeficiente do termo de ordem quatro era igual ao coeficiente do termo de ordem oito. Qual é o valor de n?

(A) 14 **(B)** 12 **(C)** 10 **(D)** 8

3. De quantas maneiras distintas m rapazes e n raparigas se podem colocar em fila, de maneira a que as raparigas fiquem sempre juntas $(m, n \in IN)$?

(A) $m!(n+1)!$ **(B)** $n! \times (m+1)!$ **(C)** $m! \times n!$ **(D)** $(m-n)!$

4. Sabe-se que a variável aleatória X segue uma distribuição normal de valor médio 7.

Admita que:

- $P(5 < X < 6) = 0{,}1$
- $P(X > 9) = 0{,}25$

Qual é o valor de $P(7 < X < 8)$?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}15$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}25$

5. Sabe-se que a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória Y é:

y_i	*1*	*2*	*3*
$P(Y = y_i)$	*0,2*	a	*0,5*

Qual é o valor médio da variável aleatória Y?

(A) 2 (B) $2{,}3$ (C) $\frac{a+0{,}7}{3}$ (D) $\frac{2a+1{,}7}{3}$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Uma caixa, que designaremos por caixa 1, tem uma bola branca e duas bolas pretas.

1.1. Considere a experiência que consiste em tirar, ao acaso, uma bola da caixa 1, observar a sua cor e voltar a colocar a bola na caixa. Efetua-se esta experiência cinco vezes.
Qual é a probabilidade de sair bola preta pelo menos quatro vezes?
Apresente todos os cálculos que efectuar e indique o valor pedido em percentagem arredondado às unidades.

1.2. Outra caixa, que designaremos por caixa 2, tem três bolas brancas e quatro bolas pretas.
Realiza-se a seguinte experiência: ao acaso, tiram-se duas bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2;
Em seguida, tiram-se simultaneamente duas bolas da caixa 2.
Sejam A e B os acontecimentos:
A: «As bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor»
B: «As bolas retiradas da caixa 2 são da mesma cor»

Determine o valor de $P\left(\overline{B} \mid A\right)$, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Numa pequena composição, justifique a sua resposta.
A sua composição deve contemplar:

- o significado de $P\left(\overline{B} \mid A\right)$, no contexto da situação descrita;
- a explicação do conteúdo da caixa 2 após a realização do acontecimento A
- a explicação do número de casos possíveis;
- a explicação do número de casos favoráveis;
- a apresentação do valor da probabilidade pedida.

2.

2.1. $a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h$ representa uma linha completa do triângulo de Pascal onde os números estão substituídos por letras. Indique o valor de f e a soma dos elementos desta linha.

2.2. O segundo elemento de outra linha do triângulo de Pascal é 200. Escolhidos dois elementos dessa linha ao acaso, qual a probabilidade de os números serem iguais?

3. Uma turma de 12.º ano é constituída por 14 raparigas e 10 rapazes.

3.1. Os alunos da turma vão dispor-se em duas filas para tirarem uma fotografia de grupo.
Combinaram que:

- os rapazes ficam sentados na fila da frente;
- as raparigas ficam na fila de trás, em pé, ficando a delegada numa das extremidades e a subdelegada na outra extremidade, podendo cada uma destas duas alunas ocupar qualquer uma das extremidades.

Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de, nestas condições, os jovens se poderem dispor para a fotografia.

3.2. Vão ser escolhidos aleatoriamente dois jovens desta turma, para constituírem uma comissão que participará num congresso.

Seja X o número de raparigas que integram a comissão.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

Apresente as probabilidades na forma de fração irredutível.

4. A Sandra tem, em cima da mesa, 12 livros, para arrumar, sendo 4 policiais, 3 de ficção científica e cinco romances.

4.1. Mostre que há 479001600 formas diferentes de a Sandra arrumar os livros aleatoriamente numa prateleira.

4.2. Admita que a Sandra arruma os livros aleatoriamente numa prateleira. Apresentando o resultado na forma de fração irredutível, determine a probabilidade de:

4.2.1. os livros do mesmo tema ficarem juntos

4.2.2. os três primeiros livros serem romances

5. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis desse espaço de resultados. Utilize a fórmula da probabilidade condicionada, a axiomática de probabilidades e as propriedades das operações entre conjuntos para provar que $P\left(\overline{A \cap B} \mid A\right) = P\left(\overline{B} \mid A\right)$.

FIM

Cotações

Grupo I (*50 pontos*)

Questão	1.	2.	3.	4.	5.
Cotação	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*

Grupo II (*150 pontos*)

Questão	1.1	1.2	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1	4.2.1	4.2.2	5

Anabela Matoso
anabelamatoso@gmail.com
www.amatoso.org

Cotação	15	20	10	15	15	20	5	15	15	20