

Grupo I

1. Foi demonstrado em aula que a referida secção é um **quadrado**. A propósito, e depois de explicado, foi proposta uma composição, que depois de corrigida foi devolvida a quem a realizou. (Ver ficha de trabalho sobre poliedros duais.)
2. Foram estudados em aula os casos particulares para $n=2$ e $n=3$ das equações do tipo $x^n = k$.
O número de soluções das equações do tipo $x^2 = b$ depende de b (Se b for um número positivo têm duas soluções simétricas, se b é negativo não têm solução e se b for zero só têm uma solução). Sendo assim é óbvio que a afirmação relativa a estas equações é falsa.
Por outro lado as equações do tipo $x^3 = b$ têm sempre uma única solução qualquer que seja o valor de b pelo que a afirmação respectiva é verdadeira.

3. Da leitura dos dados conclui-se que: $altura_{pirâmideII} = \frac{2}{3} \times altura_{pirâmideI}$ logo

$$V_{pirâmideII} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times V_{pirâmideI} \text{ e, portanto, } V_{pirâmideII} = \frac{8}{27} \times 27 \Leftrightarrow V_{pirâmideII} = 8.$$

4. Depois de se ter referido por diversas vezes, foi estudada, particularmente, a determinação de uma altura de um triângulo, dadas a base respectiva e a área. Este exercício é, assim, de aplicação direta desse conteúdo.

$$\frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \frac{\overline{CB} \times \overline{AE}}{2} \Leftrightarrow \frac{10 \times 6\sqrt{3}}{2} = \frac{12 \times \overline{AE}}{2} \Leftrightarrow 10 \times 6\sqrt{3} = 12 \times \overline{AE} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{60\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow \overline{AE} = 5\sqrt{3}$$

(Ver proposta de composição matemática cuja correcção, além de entregue em papel, foi explorada na aula)

5. As fórmulas para o cálculo do volume do cone e do volume do cilindro constam do formulário anexo a esta ficha.

Se o cone tiver a mesma base e a mesma altura do cilindro, o seu volume é um terço do volume do cilindro. Nesse caso o volume do cone seria $\frac{36}{3} = 12$. Mas, neste caso, a altura do cone é metade da altura do cilindro, logo o seu volume será metade do anteriormente calculado. Então o volume pedido é 6 cm^3 .

Grupo II

1. **1.1** A secção representada foi estudada com detalhe na aula depois de proposta como trabalho de casa. Foi ditada para o caderno diário a justificação de que se trata efetivamente de um losango (pela igualdade dos lados) mas não de um quadrado (pela diferença entre as suas diagonais). Foi, a propósito, novamente, referida a perpendicularidade de retas no espaço.

1-BN e MH - As retas são paralelas pois são lados opostos de um paralelogramo losango. **(B)**

2-HD e AB - As retas são não complanares perpendiculares. **(C)**

Reparar que não são paralelas nem concorrentes logo são não complanares; como AB é perpendicular ao plano ADH, é perpendicular a qualquer reta contida nesse plano, em particular à reta HD.

3-BN e DC - As retas são não complanares perpendiculares. **(C)**

Reparar que não são paralelas nem concorrentes logo são não complanares; como DC é perpendicular ao plano BCG, é perpendicular a qualquer reta contida nesse plano, em particular à reta BN.

4-BN e AB - As retas são concorrentes pois intersectam-se no ponto B e são perpendiculares pois AB é perpendicular ao plano BCG e, portanto, perpendicular a qualquer reta contida nesse plano, em particular à reta BN. **(D)**

5-BN e BM - As retas são concorrentes pois intersectam-se no ponto B e são oblíquas pois, como já se referiu, o polígono [MBNH] não é um quadrado. **(E)**

6-EF e HN - As retas são não complanares pois não são paralelas nem concorrentes e são oblíquas pois o seu ângulo é igual ao ângulo entre EF e MB. **(A)**

1.2.1 Os lados da secção são hipotenusas de triângulos retângulos congruentes, os triângulos [ABM], [CBN], [GHN] e [EHM], e, portanto, têm o mesmo comprimento.

Como M é o ponto médio de [EA], $\overline{AM} = \frac{\overline{EA}}{2} \Leftrightarrow \overline{AM} = 2 \text{ cm}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo [AMB], $\overline{MB}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{MB}^2 = 2^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{MB} = \pm\sqrt{20}$. Por se tratar de um comprimento $\overline{MB} > 0$, logo $\overline{MB} = \sqrt{20}$. Sendo assim $P_{[BNHM]} = 4\sqrt{20} \text{ cm}$.

1.2.2 Tendo estabelecido que se trata de um losango, a forma mais direta de determinar a sua área é aplicando a fórmula $\text{Área}_{\text{losango}} = \frac{D \times d}{2}$, sendo D a diagonal maior (correspondente à diagonal espacial do cubo) e d a diagonal menor (correspondente à diagonal facial do cubo).

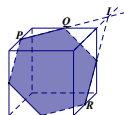
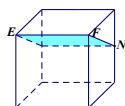
Por aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo [ADB], concluímos que $\overline{DB} = \sqrt{32}$ e, por aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo [HDB], concluímos que $\overline{HB} = \sqrt{48}$.

$$\text{Então } \text{Área}_{\text{losango}} = \frac{\sqrt{48} \times \sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow \text{Área}_{\text{losango}} = \frac{4\sqrt{2} \times 4\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \text{Área}_{\text{losango}} = 8\sqrt{6} \text{ cm}^2.$$

Notar que foi estudada em aula esta situação em particular, sendo que os cálculos envolvidos são elementares.

1.3 Como se referiu em aula mais do que uma vez, a intersecção de dois planos não paralelos é sempre uma reta. Sendo assim a afirmação é falsa.

1.4.1 A secção obtida é um retângulo. 1.4.2 A secção obtida é um hexágono regular.



2. **Figura 1:** Um plano intersecta planos paralelos segundo retas paralelas logo, considerando D o 4º ponto assinalado, a reta CD devia ser paralela à reta AB, o que não acontece.

Figura 2: Uma vez que um plano é um conjunto infinito de pontos, não poderá terminar no segmento de reta [AC] (Poderiam dizer que os lados de uma secção são sempre segmentos contidos nas faces do cubo).

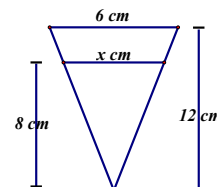
Figura 3: Qualquer plano ao intersestar um sólido, intersecta cada face uma única vez logo uma secção não pode ter dois lados contidos na mesma face.

3. Atendendo à nota, o volume do cubo é igual ao volume de água no segundo cone representado.

Consideremos uma secção do cone por um plano perpendicular à base que contém um diâmetro desta.

Obtemos assim dois triângulos semelhantes e, portanto, há proporcionalidade

direta entre lados homólogos (correspondentes). Sendo assim, $\frac{x}{6} = \frac{8}{12} \Leftrightarrow x = 4$.



O raio da circunferência que limita a superfície da água é então 2 cm.

$$V_{\text{cubo}} = V_{\text{"cone de água"}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 8 = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$$

4. $\text{Área}_{\text{secção}} = \sqrt{20} \Leftrightarrow \overline{ER} \times \overline{RS} = \sqrt{20} \Leftrightarrow \overline{ER} \times a = \sqrt{20}$ (1). Determinar \overline{ER} , em função de a :

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo [EQR]:

$$\overline{ER}^2 = (2a)^2 + a^2 \Leftrightarrow \overline{ER}^2 = 4a^2 + a^2 \Leftrightarrow \overline{ER}^2 = 5a^2 \Leftrightarrow \overline{ER} = \pm\sqrt{5a^2} \Leftrightarrow \overline{ER} = \pm\sqrt{5}a$$

Como se trata de um comprimento, $\overline{ER} > 0$, logo $\overline{ER} = \sqrt{5}a$.

$$\text{De (1) vem que: } \sqrt{5}a \times a = \sqrt{20} \Leftrightarrow a^2 = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow a^2 = \sqrt{\frac{20}{5}} \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}.$$

Como se trata de um comprimento, $a > 0$, logo $a = \sqrt{2}$.