Proposta de correcção da Ficha de Avaliação do 11º A 24 de Novembro de 2009 **versão 1**

Grupo I

1. A resposta correcta é (D) (Notar que para identificar o ângulo de dois vectores temos que os representar com a origem no mesmo ponto.)
2. $\cos\alpha = -\cos\beta$ Uma vez que os ângulos α e β são suplementares, os seus cossenos são simétricos. (C)
3. No plano, se $\vec{u}$ é perpendicular a $\vec{w}$ e $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{u}$, então $\vec{v}$ é colinear com $\vec{w}$. (D)
4. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ (A)
5. Notar que $\dot{O}B$ é o lado extremidade do ângulo de amplitude 210° e $\dot{O}A$ é o lado extremidade do ângulo de amplitude 60°, a amplitude do ângulo dos vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é $210^{\circ}-60^{\circ}=150^{\circ}$. Então $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3 \times 3 \times \cos 150^{\circ} = 9 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (D)

Grupo II

1. **1.1** $2x + 10y = 20 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{5} + 2 \qquad m_{AB} = -\frac{1}{5} \qquad tg^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right) \approx -11{,}3^{\circ}$

   A inclinação da recta AB é aproximadamente $168{,}7^{\circ}$.

   1.2 Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vectores directores das rectas AB e AC respectivamente.

   Como $m_{AB} = -\frac{1}{5}$, um vector director de AB pode ser, por exemplo, $\vec{r} = (5,-1)$.

   Da equação vectorial da recta AC, $\vec{s} = (3,5)$.

   $$\cos(AB\wedge AC) = \frac{|(5,-1)\cdot(3,5)|}{\sqrt{26}\times\sqrt{34}} \Leftrightarrow \cos(AB\wedge AC) = \frac{10}{\sqrt{26\times 34}} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow AB\wedge AC = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{884}}\right) \Leftrightarrow \Leftrightarrow AB\wedge AC \approx 70^{\circ}$$

   1.3 Se $t \perp AB$, então $m_t = -\frac{1}{m_{AB}} \Leftrightarrow m_t = 5$. Sendo assim $t : y = 5x + b$.

   Como $C \in t$, substituindo x por 3 e y por 7, concluímos que $t : y = 5x - 8$.

   1.4 Da equação reduzida da recta AB concluímos que $A(0,2)$. Então $\overrightarrow{AC} = (3,5)$.

   Um vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ é, por exemplo, $\vec{v} = (-5,3)$.

   Qualquer vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ é colinear com $\vec{v}$ ou seja é do tipo $k\vec{v}$ para algum valor de *k*.

   Pretende-se então as soluções da equação $\|k\vec{v}\| = \sqrt{17}$.

   $$\|(-5k,3k)\| = \sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{(-5k)^2 + (3k)^2} = \sqrt{17} \Leftrightarrow 34k^2 = 17 \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Os vectores pedidos são : $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2} ; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2} ; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

1.5 $A_{[AEC]} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AE}\right\| \times 3}{2}$ Como E é o ponto de intersecção da recta ***t*** com o eixo Oy,

$E(0,-8)$, logo $\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = 10$ e portanto $A_{[AEC]} = \dfrac{10\times 3}{2} \Leftrightarrow A_{[AEC]} = 15 \quad u.a.$

2. 2.1

$$f(x) = 3sen(2\pi + \pi + x) + senx \Leftrightarrow f(x) = 3sen(\pi + x) + senx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) = 3(-senx) + senx \Leftrightarrow f(x) = -3senx + senx \Leftrightarrow f(x) = -2senx \quad c.q.d.$$

2.2 $f(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow -2senx = \sqrt{3} \Leftrightarrow senx = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Como $sen\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, as soluções da equação, pertencentes ao intervalo $\left]-\pi, \pi\right[$,

são $-\dfrac{\pi}{3}$ e $-\pi + \dfrac{\pi}{3}$. $\quad C.S = \left\{-\dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{2\pi}{3}\right\}$

2.3 $f(\theta) = -2sen(\theta)$, portanto é necessário determinar o valor exacto de $sen(\theta)$.
Pela fórmula fundamental da trigonometria,

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow sen^2\theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow sen\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $\theta \in 3^{\text{o}}Q$, $sen\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Então $f(\theta) = -2\times\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) \Leftrightarrow f(\theta) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

3. 3.1. **3.1.1** $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BO} = 3\times 3\sqrt{2}\times\cos(135^{\text{o}}) = -9$

3.1.2 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA} = 3\times 3\times(-1) = -9$

3.1.3 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$ porque os vectores são perpendiculares.

Ou

3.1.1 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BO} = (3,0,0)\cdot(-3,-3,0) = -9 + 0 + 0 = -9$

3.1.2 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{O\tilde{A}} = (-3,0,0)\cdot(3,0,0) = -9 + 0 + 0 = -9$

3.1.3 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} = (0,3,0)\cdot(3,0,0) = 0$

3.2 Seja **a** a aresta da base. Sendo assim a altura é **3a.**

$A(a,0,0) \qquad C(0,a,0) \qquad V\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}, 3a\right)$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AV} = 18 \Leftrightarrow (-a, a, 0)\cdot\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 4a\right) = 18 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 18 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{18}$$

Como $a > 0, \quad a = \sqrt{18}$

$$V = \frac{1}{3}\times\sqrt{18}^2\times 3\sqrt{18} \Leftrightarrow V = 54\sqrt{2} \quad u.v.$$