

PROPOSTA DE CORREÇÃO

1.

* 1.1. $V_{cone} = \frac{35\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\text{Área}_{base} \times \text{altura}}{3} = \frac{35\pi}{3} \Leftrightarrow \pi \times \overline{AB}^2 \times \overline{AV} = 35\pi \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 5 \times \overline{AV} = 35\pi \Leftrightarrow \overline{AV} = 7$

$$(1) \quad \overline{AB}^2 = \left(\sqrt{(1-1)^2 + (2-0)^2 + (0-1)^2} \right)^2 = 5$$

O vetor \overrightarrow{AV} é um vetor normal ao plano α , logo \overrightarrow{AV} é colinear com $\vec{n}_\alpha = (2, 3, 6)$.

Assim, existe um $k \in \mathbb{R}$ tal que: $\overrightarrow{AV} = k\vec{n}_\alpha$, ou seja, $\overrightarrow{AV} = (2k, 3k, 6k)$.

Como sabemos que $\overline{AV} = 7$, vem que

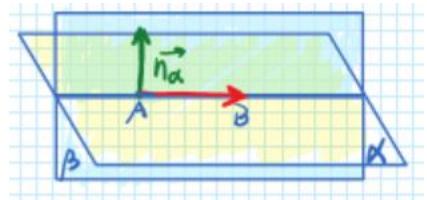
$$\|\overrightarrow{AV}\| = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + (3k)^2 + (6k)^2} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{49k^2} = 7 \Leftrightarrow 7|k| = 7 \Leftrightarrow k = \pm 1$$

Se $k = 1$, $V = A + \overrightarrow{AV} \Leftrightarrow V = (1, 2, 0) + (2, 3, 6) = (3, 5, 6)$

Se $k = -1$, $V = A + \overrightarrow{AV} \Leftrightarrow V = (1, 2, 0) + (-2, -3, -6) = (-1, -1, -6)$

Como o vértice V pertence ao primeiro octante, $V(3, 5, 6)$.

* 1.2. \overrightarrow{AB} e \vec{n}_α são dois vetores não colineares paralelos ao plano β , logo para determinar um vetor normal ao plano β temos que determinar um vetor que seja ortogonal simultaneamente a esses dois vetores.



Seja $\vec{u} = (a, b, c)$ um vetor normal a β .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -2, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 3, 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b + c = 0 \\ 2a + 3b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ 2a + 3b + 12b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ a = -\frac{15}{2}b \end{cases} \text{ Assim, } \vec{u} = \left(-\frac{15}{2}b, b, 2b \right), \text{ sendo } b \neq 0.$$

Para $b = 2$, vem $\vec{u} = (-15, 2, 4)$ e, portanto, uma equação cartesiana do plano β é do tipo $-15x + 2y + 4z + d = 0$.

Como, por exemplo, o ponto B pertence a β , vem que $-15x + 2y + 4z + d = 0 \Leftrightarrow d = 11$, logo uma equação cartesiana do plano β é $-15x + 2y + 4z + 11 = 0$, ou, equivalentemente, $15x - 2y - 4z - 11 = 0$.

Resposta: (D)

2. Sendo $E(-1,0)$, a amplitude do ângulo COE é 2α , logo a amplitude do ângulo AOC é $\pi - 2\alpha$

Assim, $C(\cos(\pi - 2\alpha), \sin(\pi - 2\alpha))$, ou seja, $C(-\cos(2\alpha), \sin(2\alpha))$ e, portanto, $\overline{CD} = \cos(2\alpha)$ e $\overline{DB} = \sin(2\alpha)$.

$$\begin{aligned}\text{Área}_{[BCD]} &= \frac{\cos(2\alpha) \times (1 - \sin(2\alpha))}{2} \Leftrightarrow \text{Área}_{[BCD]} = \frac{\cos(2\alpha) - \cos(2\alpha) \times \sin(2\alpha)}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{Área}_{[BCD]} = \frac{\cos(2\alpha)}{2} - \frac{\sin(4\alpha)}{4} \quad \text{c.q.d.}\end{aligned}$$

3. Consideremos os acontecimentos:

A : "O número escolhido é menor do que 5 milhões" e B : "O número escolhido é ímpar"

Pretendemos calcular $P(A|B)$.

$$\#B = \underbrace{5 \times {}^5C_3 \times {}^2C_2}_{\text{"nº de números ímpares terminados em 3" }} + \underbrace{5 \times {}^5C_2 \times {}^3C_2}_{\text{"nº de números ímpares terminados em 5" }} = 200 \quad \text{e} \quad \#(A \cap B) = \underbrace{{}^5C_2 \times {}^3C_2}_{\substack{\text{"nº de números ímpares menores do que 5 milhões"} }} = 30$$

$$\text{Logo, } P(A|B) = \frac{30}{200} \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{3}{20}$$

* **4.** Aplicando uma das propriedades do Triângulo de Pascal:

$${}^{n+1}C_p + 2 \times {}^{n+1}C_{p+1} + {}^{n+1}C_{p+2} = \underbrace{{}^{n+1}C_p + {}^{n+1}C_{p+1}}_{\substack{n+2 \\ C_{p+1}}} + \underbrace{{}^{n+1}C_{p+1} + {}^{n+1}C_{p+2}}_{\substack{n+2 \\ C_{p+2}}} \underbrace{\quad}_{n+3 \\ C_{p+2}}$$

Resposta: (D)

* **5.** Consideremos os acontecimentos:

R : "O aluno escolhido comprou um bilhete"

M : "O número escolhido é uma rapariga"

$$\text{Sabemos que: } \underbrace{P(R)}_{(1)} = 0,6; \underbrace{P(M|R)}_{(2)} = \frac{1}{3} \text{ e } \underbrace{P(\bar{R}|\bar{M})}_{(3)} = \frac{1}{4}.$$

Queremos determinar: $P(M \cap \bar{R})$.

$$(2) P(M|R) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(M \cap R) = \frac{1}{3} P(R) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} P(M \cap R) = 0,2$$

$$(3) P(\bar{R}|\bar{M}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{R} \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\bar{R} \cap \bar{M}) = \frac{1}{4} P(\bar{M}) \Leftrightarrow P(\bar{R} \cup M) = \frac{1}{4} P(\bar{M}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(R \cup M) = \frac{1}{4} (1 - P(M)) \Leftrightarrow 1 - (P(R) + P(M) - P(R \cap M)) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} P(M) \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(1)e(2)}{\Leftrightarrow} 1 - (0,6 + P(M) - 0,2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}P(M) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow P(M) = \frac{7}{15}$$

$$\text{Assim, } P(M \cap \bar{R}) = P(M) - (M \cap R) = \frac{7}{15} - \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$$

6. (u_n) é uma progressão geométrica, logo $u_5 = u_1 \times r^{5-1} \Leftrightarrow 27 = 3 \times r^4 \Leftrightarrow r^4 = 9 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt[4]{9}$

Como (u_n) é monótona, $r > 0$, logo $r = \sqrt[4]{9}$, ou seja, $r = \sqrt{3}$.

Assim, uma expressão do termo geral de (u_n) é: $u_n = 3 \times (\sqrt{3})^{n-1}$, ou seja, $u_n = 3^{\frac{n+1}{2}}$.

$$v_n = \log_9(u_n) \Leftrightarrow v_n = \log_9\left(3^{\frac{n+1}{2}}\right) \Leftrightarrow v_n = \frac{n+1}{2} \times \log_9(3) \Leftrightarrow v_n = \frac{n+1}{2} \times \frac{\log_3(3)}{\log_3(9)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_n = \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}, \text{ logo } (v_n) \text{ é uma progressão aritmética.}$$

$$S_k = \frac{85}{2} \Leftrightarrow \frac{v_1 + v_k}{2} \times k = \frac{85}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}k + \frac{1}{4}}{2} \times k = \frac{85}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}k\right) \times k = 85 \Leftrightarrow k^2 + 3k - 340 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm 37}{2} \Leftrightarrow k = -20 \vee k = 17$$

Como $k \in \mathbb{N}$, $k = 17$.

* 7. $\lim f(a_n) = \lim_{x \rightarrow \lim(a_n)} f(x) = \lim_{(1) x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

$$(1) \lim(a_n) = \lim \frac{2-n}{\sqrt{n^2+1}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n\left(\frac{2}{n}-1\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \lim \frac{n\left(\frac{2}{n}-1\right)}{\sqrt{n^2} \times \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim \frac{\cancel{n}\left(\frac{2}{n}-1\right)}{\cancel{n} \times \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim \frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \frac{0-1}{\sqrt{1+0}} = -1^+$$

Resposta: (D)

* 8. Se w_1 é uma das raízes de ordem 5 de um certo número complexo z , então as outras raízes são:

$$2e^{i\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{5}\right)}, \text{ cujo afixo pertence ao segundo quadrante.}$$

$$2e^{i\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)} = 2e^{i(\pi)}$$

$$2e^{i\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)} = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{5}\right)}, \text{ cujo afixo pertence ao terceiro quadrante}$$

$$2e^{i\left(\frac{7\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)} = 2e^{i\left(\frac{9\pi}{5}\right)}, \text{ cujo afixo pertence ao quarto quadrante.}$$

$$\text{Então } w_2 = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{5}\right)}$$

Vejamos:

$$|w_2| = 2, \quad w_2 \notin \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

$|w_2 + 2|$ é a medida do comprimento do lado do pentágono, pois é a distância entre os afixos de duas raízes consecutivas de z , logo é superior a 2. Assim $w_2 \notin \{z \in \mathbb{C} : |z + 2| = 2\}$.

$$\operatorname{Arg}(w_2) = -2\pi + \frac{7\pi}{5} = -\frac{3\pi}{5}, \text{ logo } w_2 \notin \left\{ z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Arg}(z) < -\frac{3\pi}{4} \right\}$$

$|w_2 + 2| \geq |w_2 + 2i|$, pois o afixo de w_2 está mais próximo do afixo de $-2i$ do que do afixo de -2 , logo

$$w_2 \in \{z \in \mathbb{C} : |z + 2| \geq |z + 2i|\}$$

Resposta: (C)

$$9. \quad z_1 = \overline{(i + \sqrt{3})} \times i^{47} \Leftrightarrow z_1 = (\sqrt{3} - i) \times i^{44} \times i^3 \Leftrightarrow z_1 = (\sqrt{3} - i) \times 1 \times (-i) \Leftrightarrow z_1 = -\sqrt{3}i + i^2 \Leftrightarrow z_1 = -1 - \sqrt{3}i$$

Seja $z_1 = \rho e^{i\theta}$.

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \wedge \theta \in 3^\circ Q, \text{ logo } \theta = \frac{4\pi}{3}, \text{ por exemplo}$$

$$\text{Assim, } z_1 = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$w = \frac{2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \times e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}} \Leftrightarrow w = \frac{2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right)}} \Leftrightarrow w = \frac{2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}}{e^{i\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}} \Leftrightarrow w = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{5\pi}{12}\right)} \Leftrightarrow w = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$$

$$|w + 1|^2 = \left| 2\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + 2i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) + 1 \right|^2 = \left| 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2i \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right|^2 = \left| \sqrt{2} - i\sqrt{2} + 1 \right|^2 = \left| (\sqrt{2} + 1) - i\sqrt{2} \right|^2 = \left(\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2 + (-\sqrt{2})^2} \right)^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 + (-\sqrt{2})^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 2 = 5 + 2\sqrt{2} \text{ c.q.d.}$$

10.

* 10.1.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 2x + 1}{-2x^2 + 6x - 4} \stackrel{\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1 + 1 - 2x + 1}{(x-1)(-2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{-2x+4} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2(x-1)}{(x-1)(-2x+4)} =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \right) \times \frac{1}{-2+4} + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{-2x+4} = 1 \times \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(2\pi x)}{1-\sqrt{x}} \stackrel{\left(\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}\right)}{=} \lim_{M.V. y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2\pi(y+1))}{1-\sqrt{y+1}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2\pi y + 2\pi)}{1-\sqrt{y+1}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2\pi y)}{1-\sqrt{y+1}} =$$

y

$$= \frac{2\pi \times \lim_{2\pi y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2\pi y)}{2\pi y}}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(1-\sqrt{y+1})(1+\sqrt{y+1})}{y(1+\sqrt{y+1})}} = \frac{2\pi \times 1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1-(\sqrt{y+1})^2}{y(1+\sqrt{y+1})}} = \frac{2\pi}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1-y-1}{y(1+\sqrt{y+1})}} = \frac{2\pi}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-y}{\cancel{y}(1+\sqrt{y+1})}} =$$

$$= \frac{2\pi}{-1} = \frac{2\pi}{-\frac{1}{2}} = -4\pi$$

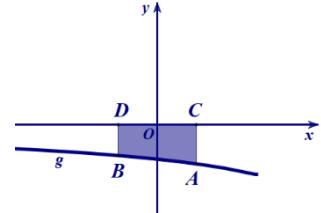
M.V.:

$$y = x-1 \Leftrightarrow x = y+1; x \rightarrow 1^+, y \rightarrow 0^+$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$, não existe nenhum valor de k para o qual a função g seja contínua em $x=1$.

* 10.2. Observando o gráfico da função g na calculadora:

Pretendemos determinar a abcissa a do ponto A para a qual a área do trapézio $[ACDB]$ é igual a $\frac{1}{4}$.



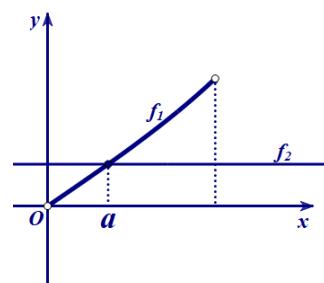
$$\text{Área}_{[ACDB]} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC} + \overline{BD}}{2} \times \overline{DC} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{-g(a) + (-g(-a))}{2} \times 2a = \frac{1}{4}$$

Pretendemos então resolver a equação $(-g(x) - g(-x)) \times x = \frac{1}{4}$

$$\text{Sejam } f_1(x) = (-g(x) - g(-x)) \times x \text{ e } f_2(x) = \frac{1}{4}$$

A solução da equação é a abcissa do ponto de interseção dos gráficos destas duas funções.

Resposta: $a \approx 0,361$



$$11. D = \{x \in \mathbb{R} : 2 - e^x > 0\} =]-\infty, \ln 2[$$

Cálculos auxiliares:

$$2 - e^x > 0 \Leftrightarrow -e^x > -2 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$$

$$\ln(2-e^x) - 2x \leq 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow \ln(2-e^x) \leq 2x \wedge x \in D \Leftrightarrow \ln(2-e^x) \leq \ln(e^{2x}) \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-e^x \leq e^{2x} \wedge x \in D \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 2 \geq 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \leq -2 \\ \text{Condição impossível em } \mathbb{R} \end{cases} \vee e^x \geq 1 \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq e^0 \wedge x \in D \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \in D$$

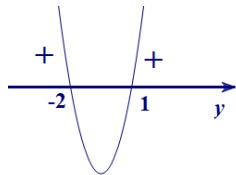
(1) Cálculos auxiliares:

Seja $y = e^x$

$$y^2 + y - 2 \geq 0 \stackrel{(2)e(3)}{\Leftrightarrow} y \leq -2 \vee y \geq 1$$

$$(2) \quad y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2 \vee y = 1$$

(3)



Resposta: C.S. = $[0, \ln 2]$

12.

* 12.1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x+2} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} =$

$$= 1 - \frac{0}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x}} = 1 - \frac{0}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1} = 1 - \frac{0}{1} = 1, \text{ logo a reta de equação } y=1 \text{ é assíntota horizontal ao gráfico}$$

de f , quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + (x+1)^2 e^{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2 e^{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \times \frac{(x+1)^2}{e^{-x-1}} =$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x-1)^2}{e^{-x-1}} = 1 + \frac{1}{-\infty} \times \frac{1}{\lim_{-x-1 \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x-1}}{(-x-1)^2}} = 1 + 0 \times \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 \times 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + (x+1)^2 e^{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x+1)^2 e^{x+1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^{-x-1}} = \frac{1}{\lim_{-x-1 \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x-1}}{(x+1)^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo a reta de equação $y=x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$.

* 12.2. Seja $x \in]-\infty, -1[$

$$f(x) = x + (x+1)^2 e^{x+1}$$

$$f'(x) = 1 + 2(x+1)e^{x+1} + (x+1)^2 e^{x+1} = 1 + e^{x+1}(2x+2+x^2+2x+1) = 1 + e^{x+1}(x^2+4x+3)$$

$$f''(x) = e^{x+1}(x^2+4x+3) + e^{x+1} \times (2x+4) = e^{x+1}(x^2+6x+7)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x+1}(x^2+6x+7) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{x+1} = 0}_{\substack{\text{condição impossível} \\ \text{em } \mathbb{R}}} \vee x^2+6x+7=0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow x = -3 - \sqrt{2} \vee x = -3 + \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-3 - \sqrt{2}$		$-3 + \sqrt{2}$		-1
e^{x+1}	+	+	+	+	+	
$x^2 + 6x + 7$	+	0	-	0	+	
Zeros e sinal de f''	+	0	-	0	+	
Varição e extremos de f'	↗	Máximo relativo	↘	Mínimo relativo	↗	

$f'(-3 + \sqrt{2})$ é, portanto, um mínimo relativo da função f' em $]-\infty, -1[$.

Para averiguar se se trata de um mínimo absoluto vamos estudar o comportamento da função f' quando $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + e^{x+1}(x^2+4x+3) \right]^{(0 \times \infty)} = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+4x+3}{e^{-x-1}} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{x^2+4x+3}{(-x-1)^2}}{\frac{e^{-x-1}}{(-x-1)^2}} \right) =$$

$$= 1 + \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x-1}}{(-x-1)^2}} = 1 + \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x-1}}{(-x-1)^2}} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1, \text{ logo a reta de equação } y = 1 \text{ é assíntota ao}$$

gráfico de f' quando $x \rightarrow -\infty$ e, portanto $f'(x) > 1$ em $]-\infty, -3 - \sqrt{2}[$.

Ora, como $f'(-3+\sqrt{2})=1+\underbrace{e^{-2+\sqrt{2}}(-2\sqrt{2}+2)}_{<0}<1$, de facto $f'(-3+\sqrt{2})$ é um mínimo absoluto da função f' em $]-\infty, -1[$.

Resposta: A abcissa do ponto, de abcissa pertencente ao intervalo $]-\infty, -1[$, no qual a reta tangente ao gráfico de f tem declive mínimo é $-3+\sqrt{2}$.

12.3. Como $x \in]2,3[$, $f(x)=1-\frac{\ln(x+1)}{x+2}$.

Se P é um ponto de abcissa x pertencente ao gráfico de f , então as suas coordenadas são $(x, f(x))$.

Uma vez que a ordenada excede o simétrico da abcissa em 3 unidades, então $f(x)=-x+3$.

Tem-se que $f(x)=-x+3 \Leftrightarrow f(x)+x-3=0$.

Seja g a função definida por $g(x)=f(x)+x-3$.

(i) g é contínua em $]-\infty, -1[$ por ser a soma de duas funções contínuas, logo, em particular, é contínua no intervalo $[2,3]$.

$$(ii) g(2)=f(2)+2-3=1-\frac{\ln(3)}{4}-1=-\frac{\ln(3)}{4}<0$$

$$g(3)=f(3)+3-3=1-\frac{\ln(4)}{5}>0$$

Logo, $g(2)<0<g(3)$.

Portanto, por (i) e (ii) e pelo Teorema de Bolzano, podemos concluir que $\exists c \in]2,3[: g(c)=0$, ou seja, $\exists c \in]2,3[: f(c)=-c+3$, o que significa que existe, pelo menos, um ponto pertencente ao gráfico de f , com abcissa pertencente ao intervalo $]2,3[$, cuja ordenada excede o simétrico da abcissa em 3 unidades.

* 13. Pelo teorema da derivada da função composta, temos que $(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1)$.

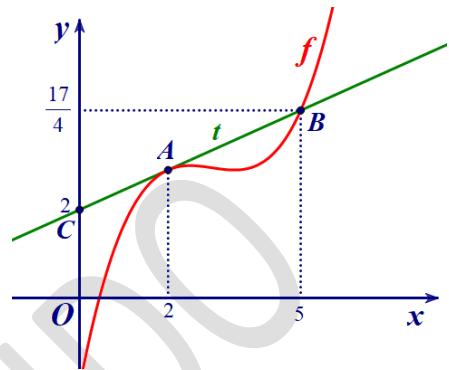
Como $g(1) = 2$, então $(f \circ g)'(1) = f'(2) \times g'(1)$.

Uma vez que a reta t é tangente ao gráfico de f no ponto A , de abscissa 2, então $f'(2)$ é igual ao declive da reta t , isto é,

$$f'(2) = m_t = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{\frac{17}{4} - 2}{5 - 0} = \frac{9}{20}.$$

Dado que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \frac{10}{9}$, então $g'(1) = \frac{10}{9}$.

Deste modo, $(f \circ g)'(1) = f'(2) \times g'(1) = \frac{9}{20} \times \frac{10}{9} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$



Resposta: (A)

* 14. 1º Processo:

Seja T um ponto pertencente à reta t e ao primeiro quadrante.

Como a reta t contém a bissetriz do ângulo AOB , então o ângulo AOT tem a mesma amplitude do ângulo TOB e, portanto, $\cos(A\hat{O}T) = \cos(T\hat{O}B)$.

Uma vez que a reta r é definida pela equação $y = x$, então um vetor diretor da reta r pode ser o vetor \vec{r} de coordenadas $(1,1)$.

Se a reta s é definida pela equação $y = 4x$, então um vetor diretor da reta s pode ser o vetor \vec{s} de coordenadas $(1,4)$.

Dado que a reta t contém a origem do referencial sendo m o declive da reta t , então uma equação reduzida da reta pode ser $y = mx$ e, assim, um vetor diretor desta reta pode ser o vetor \vec{t} de coordenadas $(1,m)$.

Ora, $A\hat{O}T = \hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{s}}$ e $T\hat{O}B = \hat{\vec{s}} \cdot \hat{\vec{t}}$, portanto,

$$\begin{aligned} \cos(A\hat{O}T) = \cos(T\hat{O}B) &\Leftrightarrow \frac{\vec{r} \cdot \vec{t}}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{t}\|} = \frac{\vec{s} \cdot \vec{t}}{\|\vec{s}\| \times \|\vec{t}\|} \Leftrightarrow \frac{(1,1) \cdot (1,m)}{\sqrt{1^2 + 1^2} \times \sqrt{1^2 + m^2}} = \frac{(1,4) \cdot (1,m)}{\sqrt{1^2 + 4^2} \times \sqrt{1^2 + m^2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1+m}{\sqrt{2}} = \frac{1+4m}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \sqrt{17}(1+m) = \sqrt{2}(1+4m) \Leftrightarrow \sqrt{17} + m\sqrt{17} = \sqrt{2} + 4m\sqrt{2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

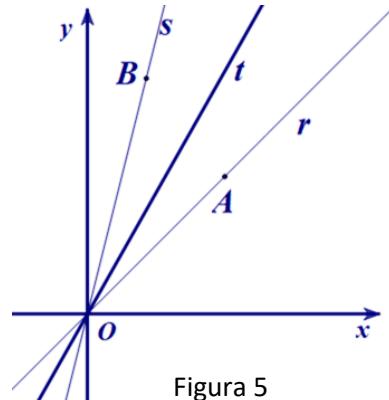


Figura 5

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow m\sqrt{17} - 4m\sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{17} &\Leftrightarrow m(\sqrt{17} - 4\sqrt{2}) = \sqrt{2} - \sqrt{17} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{17}}{\sqrt{17} - 4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{17}}{\sqrt{17} - 4\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{17} + 4\sqrt{2}}{\sqrt{17} + 4\sqrt{2}} &\Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{34} + 8 - 17 - 4\sqrt{34}}{17 - 32} \Leftrightarrow m = \frac{-3\sqrt{34} - 9}{-15} \Leftrightarrow m = \frac{1}{5}\sqrt{34} + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

2º processo: (Por sugestão do colega José Carlos Pereira)

Sejam C e D dois pontos, pertencentes, respetivamente, às retas r e s e ao primeiro quadrante, tais que $\overline{OC} = \overline{OD}$.

Desta forma o triângulo $[COD]$ é isósceles e o ponto médio de $[CD]$ pertence à reta t .

Sejam $C(a,a)$ e $D(b,4b)$, com $a > 0$ e $b > 0$.

$$\overline{OC} = \overline{OD} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{b^2 + (4b)^2} \Leftrightarrow 2a^2 = 17b^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{17}{2}b^2 \underset{a>0 \text{ e } b>0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{\frac{17}{2}}b$$

$$\text{Assim, } C\left(\sqrt{\frac{17}{2}}b, \sqrt{\frac{17}{2}}b\right)$$

O ponto médio de $[CD]$ é o ponto M , de coordenadas $\left(\frac{\sqrt{\frac{17}{2}}b+b}{2}, \frac{\sqrt{\frac{17}{2}}b+4b}{2}\right)$, ou seja,

$M\left(\frac{(\sqrt{17}+\sqrt{2})b}{2\sqrt{2}}, \frac{(\sqrt{17}+4\sqrt{2})b}{2\sqrt{2}}\right)$, logo um vetor diretor da reta t é o vetor $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{(\sqrt{17}+\sqrt{2})b}{2\sqrt{2}}, \frac{(\sqrt{17}+4\sqrt{2})b}{2\sqrt{2}}\right)$.

Assim, o declive da reta t é

$$\begin{aligned} m &= \frac{\frac{(\sqrt{17}+4\sqrt{2})b}{2\sqrt{2}}}{\frac{(\sqrt{17}+\sqrt{2})b}{2\sqrt{2}}} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{17}+4\sqrt{2}}{\sqrt{17}+\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \frac{(\sqrt{17}+4\sqrt{2}) \times (\sqrt{17}-\sqrt{2})}{(\sqrt{17}+\sqrt{2}) \times (\sqrt{17}-\sqrt{2})} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m &= \frac{17-\sqrt{34}+4\sqrt{34}-8}{17-2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{5}\sqrt{34} + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

3º processo: (Por sugestão do colega José Carlos Pereira)

Sejam C e D dois pontos, pertencentes, respetivamente, às retas r e s e ao primeiro quadrante, tais que $\overline{OC} = \overline{OD}$.

Desta forma, o triângulo $[COD]$ é isósceles, logo a sua altura é \overline{OM} , sendo M o ponto médio de $[CD]$. Assim, como M pertence à reta t , a reta t é perpendicular à reta CD , logo $m_t = -\frac{1}{m_{CD}}$

Sejam $C(a,a)$ e $D(b,4b)$, com $a > 0$ e $b > 0$.

$$\overline{OC} = \overline{OD} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{b^2 + (4b)^2} \Leftrightarrow 2a^2 = 17b^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{17}{2}b^2 \underset{a>0 \text{ e } b>0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{\frac{17}{2}}b$$

Assim, $C\left(\sqrt{\frac{17}{2}}b, \sqrt{\frac{17}{2}}b\right)$ logo

$$\overrightarrow{CD} = (b, 4b) - \left(\sqrt{\frac{17}{2}}b, \sqrt{\frac{17}{2}}b\right) = \left(b - \sqrt{\frac{17}{2}}b, 4b - \sqrt{\frac{17}{2}}b\right) = \left(\left(1 - \sqrt{\frac{17}{2}}\right)b, \left(4 - \sqrt{\frac{17}{2}}\right)b\right)$$

$$m_{CD} = \frac{\left(4 - \sqrt{\frac{17}{2}}\right)b}{\left(1 - \sqrt{\frac{17}{2}}\right)b} = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{17}}{\sqrt{2} - \sqrt{17}} \text{ e, portanto,}$$

$$m_t = -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{17}}{4\sqrt{2} - \sqrt{17}} = \frac{(\sqrt{17} - \sqrt{2}) \times (4\sqrt{2} + \sqrt{17})}{(4\sqrt{2} - \sqrt{17}) \times (4\sqrt{2} + \sqrt{17})} = \frac{4\sqrt{34} + 17 - 8 - \sqrt{34}}{32 - 17} = \frac{3\sqrt{34} + 9}{15} = \frac{1}{5}\sqrt{34} + \frac{3}{5}$$

FIM