PROVA MODELO DE MATEMÁTICA A

Matematicando (www.amatoso.org)

Duração: 150 min. (tolerância: 30 min.)

Data: junho 2021

12.º Ano

A prova inclui 11 itens, identificados no enunciado com ✻, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

INSTRUÇÕES DE REALIZAÇÃO

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica (*em modo teste*)

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere a progressão geométrica (a_n) da qual se sabe que $a_{n+1} - a_n = -3 \times 2^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Sendo r a razão da progressão (a_n), qual das afirmações pode ser verdadeira?

(A) $a_1 = -3$ e $r = 2$;

(B) $a_1 = 3$ e $r = 2$;

(C) $a_1 = -3$ e $r = \frac{1}{2}$;

(D) $a_1 = 3$ e $r = \frac{1}{2}$;

2. Sejam E um conjunto finito, não vazio, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e A, B e C três acontecimentos possíveis contidos em E.

Sabendo que os acontecimentos contrários de A e de B, $\overline{A}$ e $\overline{B}$, respetivamente, são incompatíveis, prove que:

$$P\left(C \cap \left(\overline{A \cap B}\right)\right) = \left(P\left(\overline{A} \mid C\right) + P\left(\overline{B} \mid C\right)\right) \times P(C).$$

3. Numa caixa está um determinado número de bolas, sendo 4 brancas e as restantes pretas, sendo que as bolas apenas se distinguem pela cor.

Extraem-se sucessivamente e sem reposição duas bolas da caixa.

3.1. Considere os acontecimentos:

A:" A primeira bola retirada é branca."

B:" A segunda bola retirada é preta."

Sabe-se que $P\left(B \mid \overline{A}\right) = \frac{2}{3}$.

Determine o número de bolas pretas.

3.2. Considere agora a caixa com a sua constituição original, à qual se acrescentaram algumas bolas, ficando a caixa com 6 bolas brancas, 10 bolas pretas e 2 bolas vermelhas.

Sobre uma mesa estão 6 recipientes todos diferentes nos quais vão ser colocadas todas as bolas.

Sabe-se que, no final:

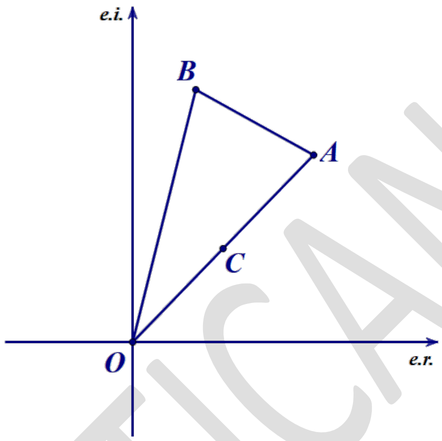
- cada recipiente têm que ter o mesmo número de bolas brancas;
- cada recipiente tem que ter no máximo três bolas.

De quantas formas podem as bolas ser colocadas nesses 6 recipientes?

4. Dez amigos, sete raparigas e três rapazes vão assistir a um espetáculo para o qual compraram dez bilhetes que correspondem a dez lugares consecutivos numa fila.
De quantas formas diferentes se podem sentar se não puder haver dois rapazes em posições consecutivas?

(A) $10!-8!\times 3!$ **(B)** $10!-7!\times 3!$ **(C)** ${}^{8}C_3\times 3!\times 7!$ **(D)** ${}^{10}C_3\times 3!\times 7!$

5. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e o triângulo $[OAB]$ representado no plano complexo.



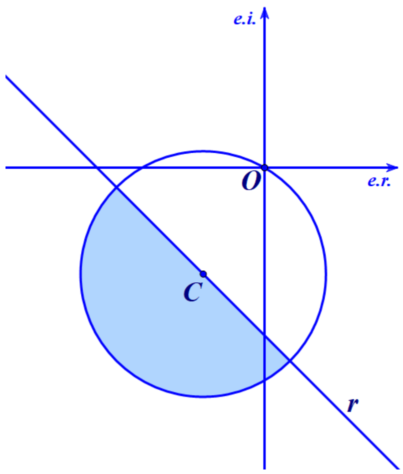
Considere os complexos z_1, z_2 e z_3, de afixos A, B e C, respetivamente.

Sabe-se que:

- $[AB]$ é um lado de um polígono regular de 12 lados com centro na origem do referencial;
- $z_2 = 1+4i$;
- C é o ponto médio de $[OA]$.

Mostre que z_3 satisfaz a condição $\operatorname{Im}\left(z+\frac{i}{4}\right)\times \operatorname{Re}(z-1)=\frac{3}{4}$.

6. Na figura ao lado está representada, no plano complexo, uma circunferência de centro em C e que passa na origem do referencial e a reta r que contém o ponto C.



Sabe-se que:

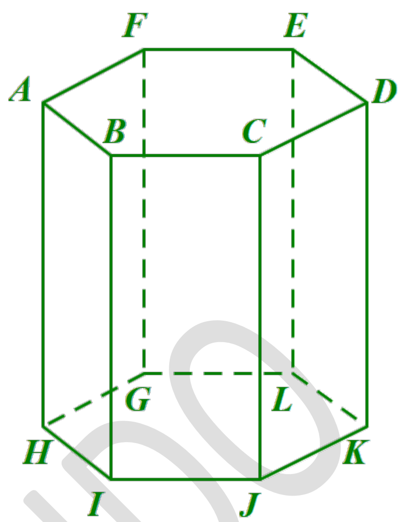
- o ponto C é a imagem geométrica de uma das soluções da equação $z^2-2\overline{z}=0$;

Qual é o perímetro da região sombreada na figura?

(A) $2(\pi+1)$ **(B)** $2(\pi+2)$ **(C)** $4(\pi+1)$ **(D)** $4(\pi+2)$

7. Na figura está representado, o prisma hexagonal regular $[ABCDEFGHIJK]$, tal que $\overline{AD} = \overline{AH}$.

Considere que, em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, o ponto A tem coordenadas $(0,0,3)$ e o ponto D tem coordenadas $(0,4,0)$.



7.1. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CK}\right)$?

(A) $\frac{5}{2}$ **(B)** 25 **(C)** $\frac{25}{4}$ **(D)** $\frac{25}{2}$

7.2. Sabendo que o ponto $R(2,2,1)$ pertence ao plano que contém a base $[ABCDEF]$ e que o ponto H tem abcissa negativa, determine o valor exato das coordenadas do ponto H.

8. Considere a função, f, de domínio $]-\infty,1[$, definida por $f(x) = (1-x^2)\ln(1-x)$.

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

8.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

8.2. Determine a(s) abcissas do(s) ponto(s) do gráfico de f nos quais a reta tangente é paralela à reta de equação $(x,y) = (0,1) + k\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right), k \in \mathbb{R}$.

9. Considere a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = x\, sen\left(\frac{1}{x}\right)$ e a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{n+2}{\sqrt{n+1}}$.

Qual é o limite da sucessão $(f(u_n))$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

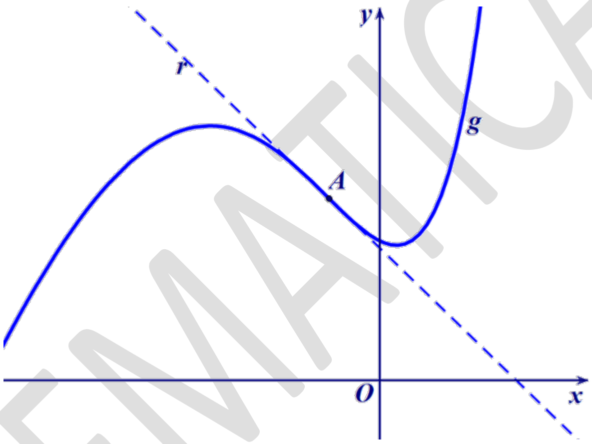
10. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, cuja primeira derivada é definida por $g'(x) = e^{2x+2} - 4e^{x+1} + 3$.

* **10.1.** Sem recorrer à calculadora, estude a função g , quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, o ou os valores de x para os quais a função f tem extremos relativos.

* **10.2.** Sem recorrer à calculadora, mostre que o gráfico da função g' não admite nenhuma assíntota não vertical quando x tende para $+\infty$.

10.3. No referencial o.n. da figura seguinte está representada parte do gráfico da função g e a reta r, tangente ao gráfico de g no ponto A. Sabe-se que a reta r interseta o gráfico da função g no ponto A.



Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine a abcissa do ponto A.

Na sua resposta:

–reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema;

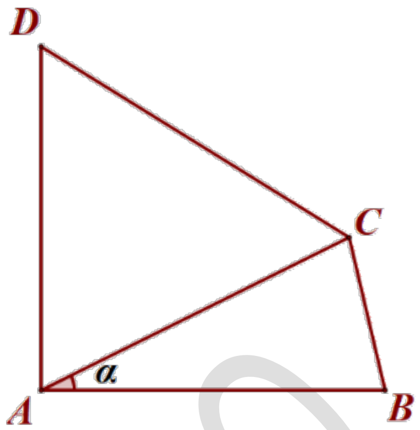
–apresente o valor pedido arredondado às centésimas.

Se, nos cálculos intermédios proceder a arredondamentos conserve, no mínimo, duas casas decimais.

11. Considere o quadrilátero $[ABCD]$ representado na figura ao lado.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 1$;
- a reta AB é perpendicular à reta AD;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo BAC, $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.



* **11.1.** Mostre que a área do quadrilátero $[ABCD]$ pode ser dada, em função de α, pela expressão $A(\alpha) = \frac{sen(\alpha) + \cos(\alpha)}{2}$.

11.2. Para um determinado valor de $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, sabe-se que $tg(2\theta) = \frac{1}{5}$. Determine, sem recorrer à calculadora, o valor exato de $A^2(\theta)$.

ou

11.3. Sem recorrer à calculadora, mostre que não existe nenhum valor de α para o qual a área do quadrilátero é igual a $\frac{1}{2}$.

FIM