Proposta de Correcção da Ficha de Trabalho nº10 Matemática 9ºano

1. 1.1 $(3x-1)^2 = (3x)^2 - 2\times 3x\times 1 + 1^2 = 9x^2 - 6x + 1$

1.2 $\left(\frac{1}{2}+y\right)\left(\frac{1}{2}-y\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4} - y^2$

1.3 $(-2+4x)^2 = (-2)^2 - 2\times 2\times 4x + (4x)^2 = 4 - 16x + 16x^2$

2. 2.1 $b^2 + 3b = b(b+3)$

2.2 $y^2 + 2y + 1 = y^2 + 2\times y\times 1 + 1^2 = (y+1)^2$

2.3 $x^2 - 5 = x^2 - \sqrt{5}^2 = \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$

2.4 $3(x+2) - x(2+x) = 3(x+2) - x(x+2) = (x+2)(3-x)$

2.5 $(y-1)^2 - 9 = (y-1)^2 - 3^2 = [(y-1)-3]\cdot[(y-1)+3] =$
$= (y-1-3)(y-1+3) = (y-4)(y+2)$

3. 3.1 $b(b+3) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b+3 = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = -3$
$C.S = \{-3,0\}$
3.2
$(y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y+1) = 0 \Leftrightarrow y+1 = 0 \vee y+1 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = -1\ C.S = \{-1\}$
3.3
$\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right) = 0 \Leftrightarrow x-\sqrt{5} = 0 \vee x+\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}\ C.S = \left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$

3.4 $(x+2)(3-x) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \vee 3-x = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee -x = -3 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$
$C.S = \{-2,3\}$

3.5 $(y-4)(y+2) = 0 \Leftrightarrow y-4 = 0 \vee y+2 = 0 \Leftrightarrow y = 4 \vee y = -2$
$C.S = \{-2,4\}$

4. 4.1 $x = 1 \vee x = -1 \Leftrightarrow x-1 = 0 \vee x+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

4.2 $x = -1 \vee x = 2 \Leftrightarrow x+1 = 0 \vee x-2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0$
A equação anterior também pode ser apresentada da seguinte forma: $x^2 - x - 2 = 0$

4.3 $x^2 = -1$

5. 5.1

$6x^2-5x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-4\times6\times1}}{2\times6} \Leftrightarrow x=\frac{5\pm1}{12} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\vee x=\frac{1}{3}\ C.S=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$

5.2

$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\times1\times2}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm1}{2} \Leftrightarrow x=-2\vee x=-1$

$C.S=\{-2,-1\}$

5.3

$2x^2-0{,}5x+0{,}03=0 \Leftrightarrow x=\frac{0{,}5\pm\sqrt{0{,}25-4\times2\times0{,}03}}{2\times2} \Leftrightarrow x=\frac{0{,}5\pm0{,}1}{4} \Leftrightarrow x=0{,}15\vee x=0{,}1$

$C.S=\{0{,}15;0{,}1\}$

5.4

$(x-2)^2+5x^2=3x \Leftrightarrow x^2-4x+4+5x^2=3x \Leftrightarrow 6x^2-7x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-4\times6\times4}}{2\times6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-96}}{12} \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{-47}}{12}\ C.S=\{\ \}$ Equação impossível.

5.5 $(x-2)(x+2)=2x \Leftrightarrow x^2-4=2x \Leftrightarrow x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\times1\times(-4)}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{20}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2+\sqrt{20}}{2}\vee x=\frac{2-\sqrt{20}}{2}\ C.S=\left\{\frac{2-\sqrt{20}}{2};\frac{2+\sqrt{20}}{2}\right\}$

6. 6.1 Por exemplo, qualquer equação do tipo $x^2=c$, sendo c um número negativo.

   6.2 Por exemplo, qualquer equação do tipo $ax^2+bx=0$, sendo a e b diferentes de zero.

7. O binómio discriminante da equação dada é $(-6)^2-4\times1\times2m$, ou seja, simplificando, $36-8m$. Para que a equação seja impossível é necessário que o binómio discriminante seja negativo, logo temos que resolver a inequação

   $36-8m<0 \Leftrightarrow -8m<-36 \Leftrightarrow \frac{-8m}{-8}>\frac{-36}{-8} \Leftrightarrow m>\frac{9}{2}\ C.S=\left]\frac{9}{2};+\infty\right[$

8. 8.1 $x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0\vee x+2=0 \Leftrightarrow x=0\vee x=-2 \qquad C.S=\{-2,0\}$

   8.2

   $(x-1)^2=9 \Leftrightarrow x^2-2x+1-9=0 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\times1\times(-8)}}{2\times1} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2+6}{2}\vee x=\frac{2-6}{2} \Leftrightarrow x=4\vee x=-2\ C.S=\{-2,4\}$

   Ou, se quiseres ir um pouco além do essencial, podes resolver da seguinte forma:

   $(x-1)^2=9 \Leftrightarrow x-1=\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x-1=3\vee x-1=-3 \Leftrightarrow x=4\vee x=-2$

   8.3 $x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{7+5}{2}\vee x=\frac{7-5}{2} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x=6\vee x=1 \qquad C.S=\{1,6\}$

   8.4 $x^2=0{,}81 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{0{,}81} \Leftrightarrow x=\pm0{,}9 \qquad C.S=\{-0{,}9;0{,}9\}$

8.5

$$\frac{y^2-1}{2_{(\times 3)}}-\frac{y+1}{3_{(\times 2)}}=0 \Leftrightarrow 3y^2-3-2y-2=0 \Leftrightarrow 3y^2-2y-5=0 \Leftrightarrow y=\frac{2\pm\sqrt{4-4\times 3\times(-5)}}{2\times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{2\pm\sqrt{64}}{6} \Leftrightarrow y=\frac{2+8}{6} \vee y=\frac{2-8}{6} \Leftrightarrow y=\frac{5}{3} \vee y=-1$$

$$C.S.=\left\{-1;\frac{5}{3}\right\}$$

Ou, se quiseres ir um pouco além do essencial, podes resolver da seguinte forma:

$$\frac{y^2-1}{2_{(\times 3)}}-\frac{y+1}{3_{(\times 2)}}=0 \Leftrightarrow 3(y^2-1)-2(y+1)=0 \Leftrightarrow 3(y-1)(y+1)-2(y+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y+1)[3(y-1)-2]=0 \Leftrightarrow (y-1)(3y-5)=0 \Leftrightarrow y-1=0 \vee 3y-5=0 \Leftrightarrow y=1 \vee y=\frac{5}{3}$$

8.6

$$a^3+2a^2=-a \Leftrightarrow a^3+2a^2+a=0 \Leftrightarrow a(a^2+2a+1)=0 \Leftrightarrow a=0 \vee a^2+2a+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=0 \vee a=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\times 1\times 1}}{2} \Leftrightarrow a=0 \vee a=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow a=0 \vee a=\frac{-2}{2} \Leftrightarrow a=0 \vee a=-1$$

$$C.S.=\{-1,0\}$$

9. 9.1 $S=5 \quad e \quad P=12$

Atendendo a a soma e o produto das raízes de uma equação do segundo grau satisfazem a equação $x^2-Sx+P=0$, podemos escrever a equação $x^2-5x+12=0$.

9.2 Se as raízes são -3 e 5 então $S=2 \quad e \quad P=-15$, portanto uma equação com estas raízes é, por exemplo, $x^2-2x-15=0$.

10. Sejam x e x+10 os catetos do triângulo rectângulo. Se a hipotenusa mede 50, então pelo Teorema de Pitágoras, $50^2=x^2+(x+10)^2$.

Para responder ao problema temos que resolver a equação:

$$2500=x^2+x^2+20x+100 \Leftrightarrow 2x^2+20x-2400=0 \Leftrightarrow x^2+10x-1200=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-10\pm\sqrt{100-4\times 1\times(-1200)}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-10\pm\sqrt{4900}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-10\pm 70}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-80}{2} \vee x=\frac{60}{2} \Leftrightarrow x=-40 \vee x=30$$

Como x representa o cateto de um triângulo, é um número positivo logo $x=30$.

Sendo assim os catetos do triângulo medem 30 e 40 m, logo a sua área é

$$A=\frac{30\times 40}{2} \Leftrightarrow A=600\ m^2$$

Nota: Recordar que, no caso do triângulo rectângulo, um dos catetos é uma base e o outro cateto é a altura correspondente (claro que a hipotenusa também pode ser uma base mas geralmente não é fácil, nesse caso, determinar a altura correspondente).

11. Comecemos por encontrar uma expressão que traduza a área da parte tracejada.

$$A_{tracejada}=A_{rectângulo}-A_{semi-círculo}\Leftrightarrow A_{tracejada}=2x\times x-\frac{\pi\times x^2}{2}\Leftrightarrow$$
$$A_{tracejada}=\frac{4x^2-\pi\times x^2}{2}\Leftrightarrow A_{tracejada}=\frac{(4-\pi)\times x^2}{2}$$

Se a área tracejada é 43, podemos escrever a seguinte equação: $43=\frac{(4-\pi)\times x^2}{2}$

Seguindo a sugestão de tomar 3,14 como valor aproximado de π, obtemos a equação $43=0{,}43x^2$. Resolvendo a equação encontramos o valor de x.

$$43=0{,}43x^2\Leftrightarrow\frac{43}{0{,}43}=\frac{0{,}43x^2}{0{,}43}\Leftrightarrow 100=x^2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{100}\Leftrightarrow x=\pm 10$$

Uma vez que x representa o raio do semicírculo, é um valor positivo, logo $x=10$.

Sendo assim a área do rectângulo é, aproximadamente, $20\times 10=200\ m^2$.

Nota: Em rigor devíamos escrever o sinal de igualdade aproximada $(\approx)$ e não de igual, na equação do segundo grau, a partir da substituição de π por 3,14.

12. Seja x o número pedido. O problema pode assim ser traduzido pela seguinte equação:

$x^2-6x=16$

Para encontrar o valor de x temos que resolver a equação.

$$x^2-6x=16\Leftrightarrow x^2-6x-16=0\Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\times 1\times(-16)}}{2\times 1}\Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36+64}}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{6\pm 10}{2}\Leftrightarrow x=8\vee x=-2$$

Como x é um número positivo o valor de x é 8.

13. Seja x o número de anos que têm que passar para que o produto das idades seja 323.

Daqui a x anos a idade do Manuel é 11+x e a idade do Quim é 13+x.

Temos então que resolver a equação: $(11+x)(13+x)=323$

$$(11+x)(13+x)=323\Leftrightarrow 143+11x+13x+x^2=323\Leftrightarrow x^2+24x-180=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-24\pm\sqrt{24^2-4\times 1\times(-180)}}{2\times 1}\Leftrightarrow x=\frac{-24\pm\sqrt{1296}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{-24\pm 36}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=-30\vee x=6$$

Como x é um número positivo, x é 6, logo é daqui por 6 anos que o produto das idades dos dois amigos é 323. (O Manuel terá 17 anos e o Quim terá 19)

14. Para indicar o número de soluções de uma equação do segundo grau, sem a resolver, temos que calcular o valor do binómio discriminante ($\Delta=b^2-4ac$)

14.1 $3x^2-6x+8=0$ $\quad\quad$ $\Delta=(-6)^2-4\times 3\times 8=36-96=-30<0$

Como o binómio discriminante é negativo a equação é impossível logo não tem soluções.

14.2 $25x^2-10x+1=0$ $\quad\quad$ $\Delta=(-10)^2-4\times 25\times 1=100-100=0$

Como o binómio discriminante é zero, a equação tem uma só solução. (Neste caso a solução diz-se que é uma raiz dupla)

14.3 $5x^2 - x + 1 = 0$ $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 5 \times 1 = 1 - 20 = -19 < 0$

Como o binómio discriminante é negativo a equação é impossível logo não tem soluções.

14.4 $-x^2 + 7x + 1 = 0$ $\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 28 + 4 = 32 > 0$

Como o binómio discriminante é positivo a equação tem duas soluções.

15. $s = -\frac{v^2}{10} + 80$

15.1 a) Substituímos v por 5 $s = -\frac{5^2}{10} + 80 \Leftrightarrow s = -2{,}5 + 80 \Leftrightarrow s = 77{,}5\ m$

Interpretação: Quando a bola vai a uma velocidade de 5m/s já percorreu uma distância de 77,5 m.

b) Substituímos v por zero $s = -\frac{0^2}{10} + 80 \Leftrightarrow s = 80\ m$

Interpretação: Quando a bola parou(porque caiu ao chão, provavelmente) já tinha percorrido uma distância de 80 m.

15.2 Substituímos s por zero e resolvemos a equação.

$$0 = -\frac{v^2}{10} + \frac{80}{1_{(\times 10)}} \Leftrightarrow 0 = -v^2 + 800 \Leftrightarrow v^2 = 800 \Leftrightarrow v = \pm\sqrt{800}$$

Como a velocidade é um valor positivo, $v \approx 28\ m/s$

Interpretação: Quando a bola é lançada (está a uma distância zero do taco) vai a uma velocidade de, aproximadamente, 28 m/s.

16. Vamos substituir o ponteado por uma letra (c).

$2x^2 - 7x + c = 0$

Se 2 é uma solução, substituindo x por 2 obtemos uma igualdade verdadeira:

$2 \times 2^2 - 7 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow 8 - 14 + c = 0 \Leftrightarrow c = 6$

A igualdade só é verdadeira se c for 6.

17. $x^2 + (k-1)x + 10 = 0$

17.1 Na equação dada: $a = 1$ $b = k - 1$ $c = 10$

Para que a equação seja incompleta, b ou c ou ambos têm que ser zero. Como c é 10 só há, neste caso, a hipótese de b ser zero. Para isso k-1 tem que ser zero, ou seja, $k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

17.2 Substituindo k por 3 obtemos a equação $x^2 + 2x + 10 = 0$

Para averiguar se -2 é solução temos que substituir x por -2 e ver se obtemos uma igualdade verdadeira.

$(-2)^2 + 2 \times (-2) + 10 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4 + 10 = 0 \Leftrightarrow 10 = 0$ Como obtivemos uma igualdade que é falsa, -2 não é solução da equação.

18. 18.1 $(x-1)(x+4)=0 \Leftrightarrow x^2-x+4x-4=0 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0$

18.2 $(x-0)(x-2)=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0$

18.3 $(x-5)(x-5)=0 \Leftrightarrow x^2-5x-5x+25=0 \Leftrightarrow x^2-10x+25=0$

Este exercício também podia ser resolvido atendendo à relação entre os coeficientes da equação do segundo grau e a soma e o produto das soluções de uma equação do segundo grau.

Sendo S a soma e P o produto das raízes de uma equação do segundo grau, a equação pode ser $x^2-Sx+P=0$.

Sendo assim:

18.1 $S=1+(-4)=-3$ $P=1\times(-4)=-4$ Obtemos a equação: $x^2+3x-4=0$

18.2 $S=0+2=2$ $P=0\times 2=0$

Obtemos a equação: $x^2-2x+0=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0$

18.3 $S=5+5=10$ $P=5\times 5=25$

Obtemos a equação: $x^2-10x+25=0$

Como vês, a equação encontrada é a mesma mas atenção que se multiplicares qualquer uma das equações anteriores por um número diferente de zero obténs equações com as mesmas soluções.

Por exemplo, as equações $x^2+3x-4=0$, $2x^2+6x-8=0$, $-x^2-3x+4=0$, etc., têm todas as mesmas soluções, como podes verificar, se quiseres…

Será que consegues perceber porquê?

A professora

Anabela Matoso

www.amatoso.org

anabelamatoso@gmail.com