PROVA MODELO 1 - MATEMÁTICA A ***Matematicando*** (www.amatoso.org)

PROPOSTA DE CORREÇÃO

Duração: 150 min. (tolerância: 30 min.)

Data: junho 2021

12.º Ano

1. Uma vez que (a_n) é uma progressão geométrica de razão r, $a_n = a_1 \times r^{n-1}$, logo, $a_2 = a_1 \times r$.

Como se sabe que $a_{n+1} - a_n = -3\times 2^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}$, vem que $a_2 - a_1 = -3\times 2^{-1} \Leftrightarrow a_2 - a_1 = -\frac{3}{2}$

Conjugando as duas informações:

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = -\frac{3}{2} \\ a_2 = a_1 \times r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \times r - a_1 = -\frac{3}{2} \\ a_2 = a_1 \times r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(r-1) = -\frac{3}{2} \\ a_2 = a_1 \times r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{3}{2(r-1)} \\ a_2 = a_1 \times r \end{cases} \quad (1)$$

Como $a_3 - a_2 = -3\times 2^{-2} \Leftrightarrow a_3 - a_2 = -\frac{3}{4}$, vem que

$a_1 \times r^2 - a_1 \times r = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r(r-1) = -\frac{3}{4}$, logo, por (1), $-\frac{\cancel{3}}{2\cancel{(r-1)}} \times r\cancel{(r-1)} = -\frac{\cancel{3}}{4} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$

e, portanto, $a_1 = -\frac{3}{2\times\left(\frac{1}{2}-1\right)} \Leftrightarrow a_1 = 3$

(Claro que, neste caso, também se podia resolver experimentando cada uma das opções)
Resposta: **(D)**

2.

$$P\left(C\cap\left(\overline{A\cap B}\right)\right) = P\left(C\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right) = P\left(\left(C\cap\overline{A}\right)\cup\left(C\cap\overline{B}\right)\right) =$$

$$= P\left(C\cap\overline{A}\right) + P\left(C\cap\overline{B}\right) - P\left(\left(C\cap\overline{A}\right)\cap\left(C\cap\overline{B}\right)\right) =$$

$$= P\left(\overline{A}\,|\,C\right)\times P(C) + P\left(\overline{B}\,|\,C\right)\times P(C) - P\left((C\cap C)\cap\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right) =$$

$$= \left(P\left(\overline{A}\,|\,C\right) + P\left(\overline{B}\,|\,C\right)\right)\times P(C) - P(C\cap\varnothing) =$$

$$= \left(P\left(\overline{A}\,|\,C\right) + P\left(\overline{B}\,|\,C\right)\right)\times P(C) - P(\varnothing) =$$

$$= \left(P\left(\overline{A}\,|\,C\right) + P\left(\overline{B}\,|\,C\right)\right)\times P(C) - 0 =$$

$$= \left(P\left(\overline{A}\,|\,C\right) + P\left(\overline{B}\,|\,C\right)\right)\times P(C) \quad c.q.d.$$

MATEMATICANDO

3.

3.1. Seja n o número total de bolas. Assim, há na caixa 4 bolas brancas e $n-4$ bolas pretas.

$$P\left(B\,|\,\overline{A}\right)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{n-4-1}{n-1}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{n-5}{n-1}=\frac{2}{3}\underset{n\neq 1}{\Leftrightarrow}3n-15=2n-2\Leftrightarrow n=13$$

Resposta: Na caixa há 9 bolas pretas.

3.2.

Comecemos por colocar uma bola branca em cada recipiente.

Relativamente às bolas vermelhas há duas formas diferentes, mutuamente exclusivas, de as colocar nos recipientes.

Ou colocamos uma bola vermelha em cada um de dois recipientes, o que pode ser feito de ${}^{6}C_2$ maneiras, ou colocamos as duas bolas vermelhas no mesmo recipiente, o que pode ser feito de ${}^{6}C_1$ maneiras.

Em qualquer um dos casos as bolas pretas serão depois distribuídas pelos recipientes de modo que cada recipiente fique com um número total de 3 bolas, o que só pode ser feito, em cada caso, de uma maneira.

Assim, a resposta ao problema é ${}^{6}C_2+{}^{6}C_1=21$.

4. Para que não haja rapazes em posições consecutivas, os rapazes só poderão ocupar três dos lugares entre as raparigas ou então ficarem “ nas pontas”.

Vejamos o esquema seguinte:

$$\times M\times M\times M\times M\times M\times M\times M\times$$

Vemos que há 8 lugares possíveis nos quais os rapazes se podem sentar de forma a não ocuparem posições consecutivas.

O número de maneiras de escolher os 3 lugares para os rapazes se sentarem é ${}^{8}C_3$.

Para cada uma destas maneiras de escolher os lugares, os 3 rapazes podem distribuir-se por esses 3 lugares de $3!$ maneiras e as 7 raparigas podem distribuir-se pelos 7 lugares de $7!$ maneiras.

A resposta é então : ${}^{8}C_3\times 3!\times 7!$ Resposta **(C)**.

5. Uma vez que $[AB]$ é um lado de um polígono regular de 12 lados com centro na origem do referencial, sabemos que $B\hat{O}A=\frac{2\pi}{12}$, ou seja $B\hat{O}A=\frac{\pi}{6}$ radianos, e $|z_1|=|z_2|$.

Como C é o ponto médio de $[OA]$, $|z_3|=\frac{1}{2}|z_2|$.

Assim, para obter z_3 basta multiplicar z_1 por $\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

$$z_3=z_1\times\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\Leftrightarrow z_3=(1+4i)\times\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\Leftrightarrow z_3=(1+4i)\times\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+1\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)i$$

Para mostrar que z_3 satisfaz a condição $\operatorname{Im}\left(z+\frac{i}{4}\right)\times\operatorname{Re}(z-1)=\frac{3}{4}$ basta, por exemplo, substituir z por z_3 e verificar que obtemos uma proposição verdadeira.

$$\operatorname{Im}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+1\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)i+\frac{i}{4}\right)\times\operatorname{Re}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+1\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)i-1\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+1\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)i\right)\times\operatorname{Re}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+1-1\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)i\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{4}$, que é uma proposição verdadeira.

6. Repare que, uma vez que a circunferência tem centro no ponto C e passa na origem do referencial, o seu raio é o módulo do complexo cujo afixo é o ponto C.

$$z^2-2\bar{z}=0\underset{M.V.}{\Leftrightarrow}\left(\rho e^{i\theta}\right)^2=2\rho e^{i(-\theta)}\Leftrightarrow \rho^2 e^{i(2\theta)}=2\rho e^{i(-\theta)}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^2=2\rho\\ 2\theta=-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

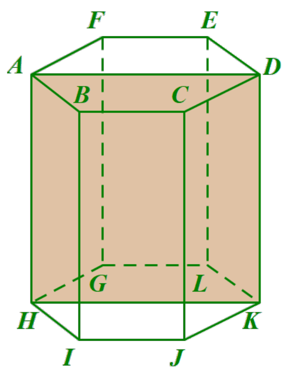
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho(\rho-2)=0\\ \theta=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=0\\ ---\end{cases}\vee\begin{cases}\rho=2\\ \theta=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Vemos assim que a equação admite como soluções o complexo nulo e três outros complexos de módulo 2, logo o módulo do complexo cujo afixo é o ponto C é 2.
O perímetro da região sombreada é igual à soma do semiperímetro da circunferência com o seu diâmetro, logo é igual a $2\pi+4$, ou seja, $2(\pi+2)$. Resposta **(B)**.

7.

* **7.1.** $\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CK}\right)=\overrightarrow{AD}\cdot\left(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CK}}_{\overrightarrow{AK}}-\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$

$$=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AK}\right\|\times\cos(45^\circ)-\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\cos(0^\circ)=5\times5\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-5\times\frac{5}{2}\times1=\frac{25}{2}$$



Note que:

- $\overline{AD}=\sqrt{0^2+3^2+4^2}=5$, logo, como $\overline{AD}=\overline{AH}$, $[AHKD]$ é um quadrado de lado 5. Assim, $K\hat{A}D=45^\text{o}$.

- Como se trata de um hexágono regular, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares e $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=2\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.

Resposta: **(D)**

MATEMATICANDO

7.2. Para determinar as coordenadas do ponto H temos que determinar as coordenadas de um vetor normal ao plano, ABC, que contém a base $[ABCDEF]$ do prisma.

Um vetor normal ao plano ABC será ortogonal simultaneamente aos vetores $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AR}$.

$\overrightarrow{AD} = D - A = (0,4,-3)$ e $\overrightarrow{AR} = R - A = (2,2,-2)$

Seja $\vec{n} = (a,b,c)$ um vetor normal ao plano ABC. Sabemos então que:

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AR} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b,c)\cdot(0,4,-3) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(2,2,-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b-3c = 0 \\ 2a+2b-2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{4}c \\ a = \frac{1}{4}c \end{cases}$$

Considerando, por exemplo, $c = 4$, vem que um vetor normal ao plano ABC é, por exemplo o vetor $\vec{n} = (1,3,4)$.

Pretendemos um vetor $\vec{v}$, colinear com $\vec{n} = (1,3,4)$ e com norma 5:

$$\vec{v} = k\vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} = (k,3k,4k)$$

$$\|\vec{v}\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + (3k)^2 + (4k)^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{26k^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{26}|k| = 5 \Leftrightarrow k = \pm\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

Então, $H = A + \frac{5\sqrt{26}}{26}\times(1,3,4)$ ou $H = A - \frac{5\sqrt{26}}{26}\times(1,3,4)$

Como é dito no enunciado que a abcissa de H é negativa, efetuando os cálculos vem que

$$H = \left(-\frac{5\sqrt{26}}{26}, -\frac{15\sqrt{26}}{26}, -\frac{20\sqrt{26}}{26}+3\right)$$

8.

* **8.1.** Uma vez que f é uma função contínua, por se tratar do produto de duas funções contínuas (uma função quadrática e a função composta de uma função logarítmica com uma função afim), só poderá ser assíntota vertical a reta de equação $x = 1$.

Vejamos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[(1-x^2)\ln(1-x)\right] \overset{(0\times\infty)}{=} \lim_{x\to 1^-}(1+x)\times\lim_{x\to 1^-}\left[(1-x)\ln(1-x)\right] =$$

$$= 2\times\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{1-x}} \underset{M.V.}{=} 2\times\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y} = 2\times\lim_{y\to+\infty}\frac{-\ln(y)}{y} = 2\times\left(-\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}\right) = 2\times 0 = 0$$

M.V.:

$y = \frac{1}{1-x}$; se $x \to 1^-$, então $y \to +\infty$.

Concluímos assim que o gráfico da função f não admite assíntotas verticais.

8.2. A reta de equação $(x,y)=(0,1)+k\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right),k\in\mathbb{R}$ tem declive -1, pois $\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=-1$.

Pretendemos então determinar o(s) valor(es) de x para os quais $f'(x)=-1$.

Seja $x\in\left]-\infty,1\right[$

$$f'(x)=-2x\times\ln(1-x)+\left(1-x^2\right)\times\frac{-1}{1-x}\Leftrightarrow f'(x)=-2x\times\ln(1-x)-\frac{(1-x)(1+x)}{1-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=-2x\times\ln(1-x)-1-x$$

$$f'(x)=-1\Leftrightarrow -2x\times\ln(1-x)-1-x=-1\Leftrightarrow -2x\times\ln(1-x)-x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\times\left(-2\ln(1-x)-1\right)=0\Leftrightarrow x=0\vee\ln(1-x)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=0\vee 1-x=e^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee x=1-\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Resposta: as abcissas dos pontos são 0 e $1-\frac{1}{\sqrt{e}}$.

9. $$\lim(u_n)=\lim\frac{n+2}{\sqrt{n+1}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\frac{\sqrt{(n+2)^2}}{\sqrt{n+1}}=\lim\sqrt{\frac{n^2+4n+4}{n+1}}=\sqrt{\lim\frac{n^2+4n+4}{n+1}}=$$

$$=\sqrt{\lim\frac{n^2}{n}}=\sqrt{\lim n}=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

$$\lim\left(f(u_n)\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\,sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]\overset{(\infty\times 0)}{=}\lim_{\frac{1}{x}\to 0^+}\frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$$

Resposta **(B)**

10.

10.1.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow e^{2x+2}-4e^{x+1}+3=0\underset{C.A.}{\Leftrightarrow}e^{x+1}=3\vee e^{x+1}=1\Leftrightarrow x+1=\ln(3)\vee x+1=0\Leftrightarrow x=-1+\ln(3)\vee x=-1$$

$C.A.$:

Seja $y=e^{x+1}$. Obtemos assim, $y^2-4y+3=0\Leftrightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}\Leftrightarrow y=3\vee y=1$

x	$-\infty$	-1		$-1+\ln(3)$	$+\infty$
Sinal de g'	$+$	0	$-$	0	$+$
Variação de g	$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	$g\left(-1+\ln(3)\right)$	$\nearrow$

A função g é estritamente crescente em $\left]-\infty,-1\right]$ e em $\left[-1+\ln(3),+\infty\right[$ e é estritamente decrescente em $\left[-1,-1+\ln(3)\right]$.

A função g admite um máximo relativo para $x=-1$ e um mínimo relativo para $x=-1+\ln(3)$.

MATEMATICANDO

10.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x+2}-4e^{x+1}+3}{x}\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(e^{x+2}-4e\right)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x+2}-4e\right)+\frac{3}{+\infty}=+\infty\times\left(+\infty-4e\right)+0=+\infty$

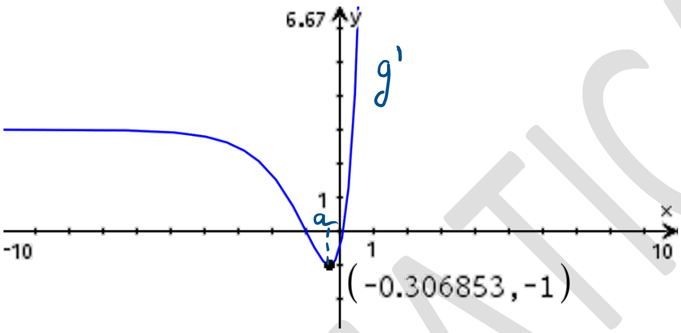
Uma vez que este limite não é um número real, o gráfico de g' não admite nenhuma assíntota não vertical quando x tende para $+\infty$.

10.3. Uma vez que a concavidade do gráfico de g muda no ponto A, sabemos que o ponto A é um ponto de inflexão do gráfico da função g.

Para determinar a abcissa do ponto A podemos usar, pelo menos, dois processos.

<u>1ºProcesso:</u>

Determinar o minimizante de g'.

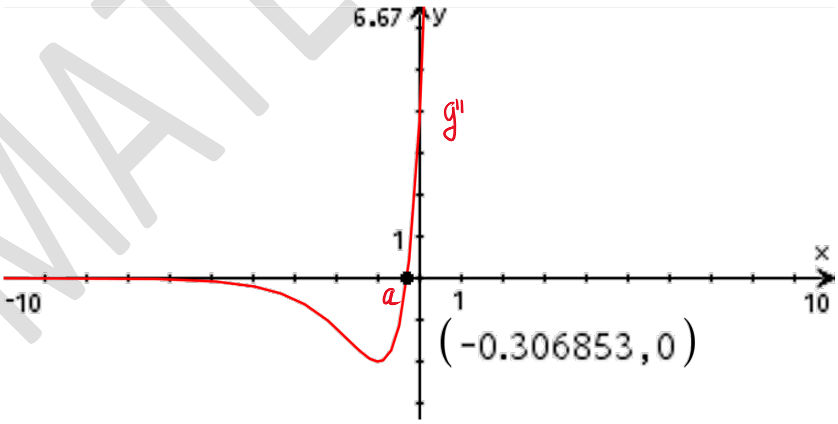


$a\approx-0,31$ é o minimizante de g', logo é a abcissa do ponto A.

<u>2º processo</u>:

Determinar o zero de g'', sabendo que g'' terá que mudar de sinal nesse zero.

Podemos recorrer à calculadora para obter diretamente o gráfico de g''.

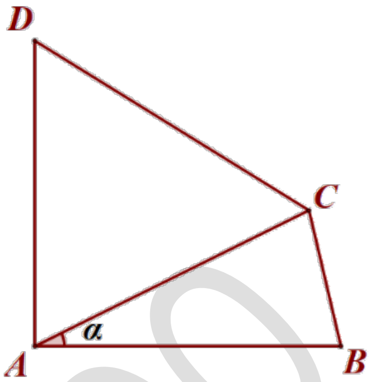


$a\approx-0,31$ é o zero de g''. Uma vez que a função g'' muda de sinal em $x=a$, a é a abcissa do ponto de inflexão do gráfico de g.

MATEMATICANDO

11.

11.1. Sejam E e F as projeções ortogonais do ponto C, nas retas AB e AD, respetivamente.



$$Área_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB}\times\overline{CE}}{2} + \frac{\overline{AD}\times\overline{CF}}{2}$$

$$sen\alpha = \frac{\overline{CE}}{1} \Leftrightarrow \overline{CE} = sen\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AE}}{1} \Leftrightarrow \overline{AE} = \cos\alpha$$

$$A(\alpha) = \frac{1\times sen\alpha}{2} + \frac{1\times\cos\alpha}{2} \Leftrightarrow A(\alpha) = \frac{sen\alpha+\cos\alpha}{2} \quad c.q.d.$$

11.2. $A^2(\theta) = \left(\frac{sen\theta+\cos\theta}{2}\right)^2 \Leftrightarrow A^2(\theta) = \frac{sen^2\theta + 2sen\theta\times\cos\theta + \cos^2\theta}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A^2(\theta) = \frac{1+2sen\theta\times\cos\theta}{4} \Leftrightarrow A^2(\theta) = \frac{1+sen(2\theta)}{4}$$

Uma vez que $tg(2\theta) = \frac{1}{5}$, vem que:

$$1+tg^2(2\theta) = \frac{1}{\cos^2(2\theta)} \Leftrightarrow 1+\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(2\theta)} \Leftrightarrow \cos^2(2\theta) = \frac{25}{26}$$

$$tg^2(2\theta) = \frac{sen^2(2\theta)}{\cos^2(2\theta)} \Leftrightarrow \frac{1}{25} = \frac{sen^2(2\theta)}{\frac{25}{26}} \Leftrightarrow sen^2(2\theta) = \frac{1}{26}$$

Como $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $0<2\theta<\pi$, logo $sen(2\theta)>0$ e, portanto, $sen(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

Assim, $A^2(\theta) = \frac{1+\frac{\sqrt{26}}{26}}{4} \Leftrightarrow A^2(\theta) = \frac{26+\sqrt{26}}{104}$.

11.3. $A(\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{sen\alpha+\cos\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sen\alpha+\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\times sen\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\times 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow sen\alpha\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\alpha\times sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow sen\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}+2k\pi \vee \alpha+\frac{\pi}{4} = \pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \vee \alpha = \frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Ora, no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ esta condição é impossível, o que demonstra o pretendido.

FIM

MATEMATICANDO