EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais

Programa novo implementado em 2005/2006

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2006

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implica a anulação de todos os itens de escolha múltipla.

V.S.F.F.

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário (pág. 3).

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\qquad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

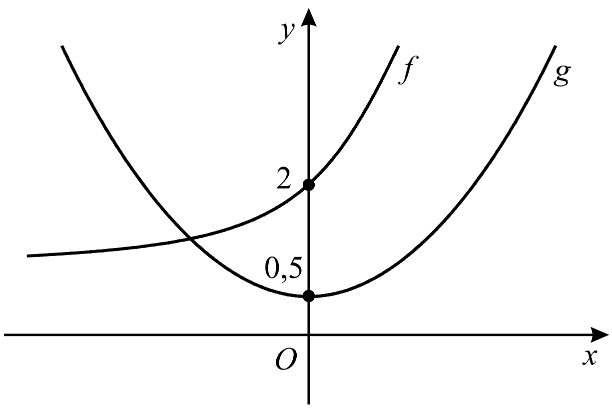
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, partes dos gráficos de duas funções, f e g, contínuas em $\mathbb{R}$.
Tal como a figura sugere,
- nenhum dos gráficos intersecta o eixo Ox;
- os gráficos de g e de f intersectam o eixo Oy nos pontos de ordenadas $0{,}5$ e 2, respectivamente.



Apenas uma das equações seguintes é impossível. Qual delas?

(A) $f(x)+g(x)=0$

(B) $f(x)-g(x)=0$

(C) $f(x)\times g(x)=1$

(D) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$

2. Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = \dfrac{e^x + 5}{2 + \cos x}$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n+1}{n^2}$

Indique o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n)$

(A) 4 **(B)** 3 **(C)** 2 **(D)** 1

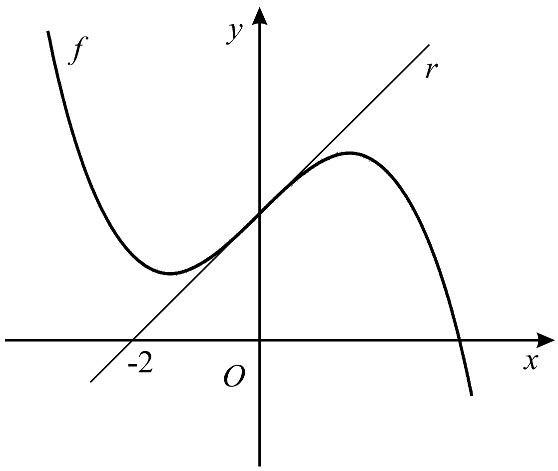
3. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \frac{\ln\left(\sqrt{e^x}\right)}{2} \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Qual das seguintes expressões pode também definir h ?

(A) $\sqrt{x}$ **(B)** $\dfrac{x}{2}$ **(C)** $\dfrac{x}{4}$ **(D)** $\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial f.
Tal como a figura sugere, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e voltada para baixo em $[0, +\infty[$.



A recta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares e intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -2.

Sabendo que f' e f'' designam, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas de f, indique o valor de $f(0) + f'(0) + f''(0)$

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

5. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que $P(A) = 0{,}3$

Apenas um dos acontecimentos seguintes pode ter probabilidade inferior a $0{,}3$.

Qual deles?

(A) $A \cup B$ **(B)** $\overline{A} \cup B$ **(C)** $A \cap B$ **(D)** $\overline{A \cap B}$

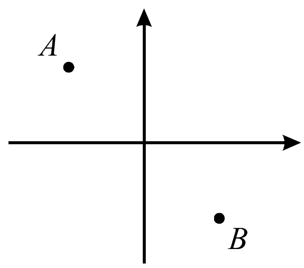
6. Uma variável aleatória X tem a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\dfrac{{}^{2005}C_{99}}{{}^{2006}C_{100}}$	$\dfrac{a}{{}^{2006}C_{100}}$

Indique o valor de a.

(A) ${}^{2005}C_{99}$ **(B)** ${}^{2005}C_{100}$ **(C)** ${}^{2006}C_{99}$ **(D)** ${}^{2006}C_{100}$

7. Os pontos A e B, representados na figura, são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quadradas de um certo número complexo z.



Qual dos números complexos seguintes pode ser z?

(A) 1 **(B)** i **(C)** -1 **(D)** $-i$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine $\dfrac{4+2\,i\left(cis\,\frac{\pi}{6}\right)^6}{3+i}$ apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

1.2. Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, $arg(z)$ designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[\,0, 2\pi\,[$.

Represente a região do plano complexo definida pela condição, em $\mathbb{C}$,

$$\frac{1}{2} \leq |\,z\,| \leq 1 \qquad \wedge \qquad \frac{3\,\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{5\,\pi}{4}$$

e determine a sua **área**.

2.

2.1. Uma coluna com a forma de um prisma hexagonal regular está assente no chão de um jardim. Dispomos de seis cores (amarelo, branco, castanho, dourado, encarnado e verde) para pintar as sete faces visíveis (as seis faces laterais e a base superior) desse prisma.
Admita que se pintam de verde duas faces laterais opostas.
Determine de quantas maneiras diferentes podem ficar pintadas as restantes **cinco** faces, de tal modo

- que duas faces que tenham uma aresta comum fiquem pintadas com cores diferentes
- e que duas faces laterais que sejam opostas fiquem pintadas com a mesma cor.

2.2. Considere um prisma hexagonal regular num referencial o.n. $Oxyz$, de tal forma que uma das suas bases está contida no plano de equação $z = 2$.
Escolhendo ao acaso dois vértices do prisma, qual é a probabilidade de eles definirem uma recta paralela ao eixo Oz? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. De uma caixa com dez bolas brancas e algumas bolas pretas, extraem-se sucessivamente, e ao acaso, duas bolas, não repondo a primeira bola extraída, antes de retirar a segunda.
Considere os acontecimentos:
A: «*a primeira bola extraída é preta*»;
B: «*a segunda bola extraída é branca*».

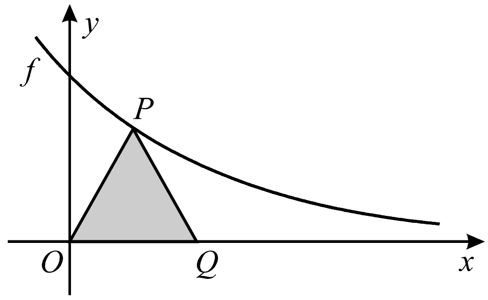
Sabe-se que $P(B|A) = \frac{1}{2}$ ($P(B|A)$ designa probabilidade de B, se A)

Quantas bolas pretas estão inicialmente na caixa? Numa pequena composição, justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B|A)$, no contexto da situação descrita.

4. Na figura estão representados:

- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x}$
- um triângulo **isósceles** $[OPQ]$ $\left(\overline{PO} = \overline{PQ}\right)$, em que:

• O é a origem do referencial;
• P é um ponto do gráfico de f;
• Q pertence ao eixo das abcissas.



Considere que o ponto P se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de f.

O ponto Q acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{PO}$ permanece sempre igual a $\overline{PQ}$.

Seja A a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder, à abcissa x do ponto P, a área do triângulo $[OPQ]$.

4.1. Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, se tem $A(x) = x\,e^{-x}$

4.2. **Sem recorrer à calculadora**, estude a função A quanto à monotonia e conclua qual é o valor máximo que a área do triângulo $[OPQ]$ pode assumir.

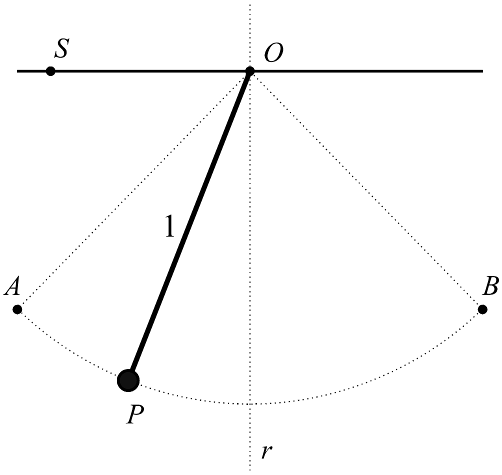
5. De uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

• f é contínua;

• a recta de equação $y = x$ é assimptota do gráfico de f, quer quando $x \to +\infty$, quer quando $x \to -\infty$.

Mostre que o gráfico da função g, definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = x\,f(x)$, não tem qualquer assimptota.

6. Na figura está representada uma esfera suspensa de um fio com 1 metro de comprimento, fixo no ponto O.



O centro da esfera oscila entre os pontos A e B, que são simétricos relativamente à recta vertical r.

A recta r passa pelo ponto O e é perpendicular à recta OS.

No instante inicial, o centro da esfera coincide com o ponto A.

Admita que, t segundos após esse instante inicial, o centro da esfera está num ponto P tal que a amplitude, em radianos, do ângulo SOP é dada (aproximadamente) por

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cos\left(\sqrt{9{,}8}\ t\right)$$

Nas duas alíneas seguintes, **não utilize a calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos.

6.1. Determine a distância do centro da esfera à recta OS, no instante inicial.

6.2. Determine o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na recta r. Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

7. Considere a função f definida no intervalo $[1, 2]$ por $f(x) = \cos(x-1) + \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Para um certo valor real positivo a e para um certo valor real b, a função g, definida no intervalo $[1, 2]$ por $g(x) = a \,.\, f(x) + b$, tem por contradomínio o intervalo $[4, 5]$.

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine os valores de a e de b, arredondados às centésimas.
Explique como procedeu. Na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que tenha visualizado na calculadora, bem como coordenadas relevantes de algum, ou alguns, pontos.
Sempre que, em valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve um mínimo de três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I	**63**
Cada resposta certa	9
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
Grupo II	**137**
1.	21
1.1.	10
1.2.	11
2.	20
2.1.	10
2.2.	10
3.	12
4.	28
4.1.	14
4.2.	14
5.	14
6.	28
6.1.	14
6.2.	14
7.	14
TOTAL	**200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais

Programa novo implementado em 2005/2006

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2006

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 20
2.1. 10
2.2. 10

3. 12

4. 28
4.1. 14
4.2. 14

5. 14

6. 28
6.1. 14
6.2. 14

7. 14

TOTAL **200**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	A	C	C	C	C	B	D
Versão 2	D	A	B	B	B	A	B

Grupo II

Critérios gerais

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.

2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.

3. As cotações a atribuir às respostas dos examinandos são expressas obrigatoriamente em números inteiros.

4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:
- Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser de 0 (zero) pontos.
- Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser a soma algébrica das cotações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8 e 9 destes critérios gerais, e das desvalorizações previstas nos pontos 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a cotação a atribuir é de 0 (zero) pontos.

5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.

6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.

   6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

   6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.
   Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos.
   Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, o cálculo da derivada de uma função, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
   - erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
   - erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
   - transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
   - transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

   6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.

   6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

   6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

   6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.

7. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a cotação não deve ser desvalorizada caso o examinando não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização). Se não for pedida aproximação para o resultado final, o examinando deve apresentar o valor exacto. Se o examinando apresentar, como resultado final, uma aproximação do valor exacto, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto na cotação a atribuir à etapa correspondente ao resultado final.

8. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

9. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «sem recorrer à calculadora», «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

10. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a cotação total a atribuir ao item deve ser desvalorizada em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.

11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na cotação total a atribuir ao item, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado.. -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução .... -2 pontos

Critérios específicos

1.1. 10

$\left(cis\ \frac{\pi}{6}\right)^6 = cis\ \pi$ 1

$cis\ \pi\ =\ -1$ 1

Simplificação do numerador 1

Divisão 4

Indicação da multiplicação de ambos os termos
da fracção por $3 - i$ 1

Cálculo do novo numerador 1

Cálculo do novo denominador 1

Simplificação da fracção 1

Escrita na forma trigonométrica.. 3

Módulo 1

Argumento 1

Escrita na forma $\rho\, cis\, \theta$ 1

1.2. 11

Representação das duas circunferências **(ver nota 1)** 2

Representação das duas semi-rectas **(ver nota 2)** 2

Indicação da região pedida, com a fronteira a cheio e o interior sombreado **(ver nota 3)** 3

Determinação da área pedida 4

Área da coroa circular 2

Divisão por 4 2

Notas:

1. A cotação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Representação correcta: duas circunferências com centro na origem, com indicação dos respectivos raios (ou onde o raio de uma seja o dobro do raio da outra) 2

Representação de duas circunferências com centro na origem, sem indicação dos respectivos raios e onde o raio de uma não seja o dobro do raio da outra 1

Outras situações 0

2. A cotação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Representação correcta: bissectriz do segundo quadrante e bissectriz do terceiro quadrante 2

Representação de duas semi-rectas, uma contida no segundo quadrante e outra no terceiro, mas em que pelo menos uma delas não é a bissectriz do respectivo quadrante 1

Outras situações 0

3. A cotação desta etapa só deve ser atribuída se nenhuma das etapas anteriores tiver sido cotada com 0 (zero) pontos e se a região sombreada for a região contida nos segundo e terceiro quadrantes e limitada pelas duas circunferências e pelas duas semi-rectas.
Se a fronteira não estiver representada a cheio, a cotação desta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2.1. .... **10**

Expressão que dá o número pedido **(ver nota 1)**..9

Número pedido **(ver nota 2)**..1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir.

$5 \times 4 \times 3$ (ou equivalente) 9
$6 \times 5 \times 4 \times 3$ (ou equivalente) 5
$5 \times 4 \times 4$ (ou equivalente) 5
$6 \times 5 \times 4$ (ou equivalente) 5
Outras situações 0

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

2.2. .... **10**

Expressão que dá a probabilidade **(ver notas 1 e 2)**.. 9

Resultado na forma de fracção irredutível **(ver nota 3)**....................................... 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir.

1.º caso: Fracções com denominador ${}^{12}C_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

6 (ou equivalente) 9
12 (ou equivalente) 6
${}^{6}C_2$ (ou equivalente) 3
Outras situações 2

2.º caso: Fracções com denominador ${}^{12}A_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

12 (ou equivalente) 9
6 (ou equivalente) 6
${}^{6}A_2$ (ou equivalente) 3
Outras situações 2

3.º caso: Fracções com denominador 18 (ou equivalente) e com numerador igual a:

6 (ou equivalente) 4
Outras situações 0

4.º caso: Fracções com outros denominadores 0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

4. O examinando pode apresentar directamente o resultado 1/11, acompanhado de uma justificação do tipo: «*escolhido um dos dois vértices, existem onze casos possíveis para o outro, dos quais só um é favorável, que é o que está na mesma aresta lateral*».

3. .... **12**

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

No contexto da situação descrita, $P(B \mid A)$ *significa «probabilidade de a segunda bola extraída ser branca, sabendo que a primeira bola extraída foi preta».*

Do facto de essa probabilidade ser $\frac{1}{2}$*, decorre que, após a extracção de uma bola preta, ficaram, na caixa, tantas bolas pretas como brancas. Portanto, ficaram na caixa dez bolas pretas.*

Podemos assim concluir que, inicialmente, havia onze bolas pretas na caixa.

Tal como o exemplo atrás ilustra, para que a composição possa ser considerada completa deverá contemplar **explicitamente** os seguintes pontos:

- o significado de $P(B \mid A)$, no contexto da situação descrita;
- a explicação correcta de que, após a primeira extracção, ficaram, na caixa, tantas bolas pretas como brancas;
- a conclusão de que, inicialmente, havia onze bolas pretas na caixa.

A cotação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

A composição contempla os três pontos 12

A composição contempla dois pontos 8

A composição contempla um ponto 4

Nota:
Se o examinando apresentar o número pedido (11), mas não respeitar a instrução de elaborar uma composição, deverão ser atribuídos 0 (zero) pontos à sua resposta.

4.1. .... **14**

A resposta do examinando deve ser classificada de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

O examinando escreve uma expressão correcta para a área do triângulo, em função de x $\left(\text{por exemplo: } \dfrac{2\,x\,e^{-x}}{2} \text{ ou } 2 \times \dfrac{x\,e^{-x}}{2}\right)$, e simplifica-a correctamente, obtendo a expressão do enunciado 14

O examinando escreve uma expressão correcta para a área do triângulo, em função de x, mas não a simplifica, ou simplifica-a incorrectamente 12

O examinando não escreve uma expressão correcta para a área do triângulo, em função de x, mas há evidência de ter identificado correctamente a sua base e a sua altura 8

O examinando não escreve uma expressão correcta para a área do triângulo, em função de x, mas há evidência de ter identificado correctamente apenas a sua base ou apenas a sua altura 4

4.2. .... **14**

Determinar $A'(x)$ 5

Evidenciar a intenção de calcular $A'(x)$ 1

Derivada de e^{-x} 1

Restantes cálculos 3

Determinar o zero de A' 3

Escrever a equação $A'(x) = 0$ 1

Resolver a equação $A'(x) = 0$ 2

Estudo do sinal de A' e consequente conclusão (estudo que pode ser apresentado por meio de um quadro) 4

Primeira linha do quadro **(ver nota 1)** 2

Sinal de A' 1

Relação entre o sinal de A' e a monotonia de A 1

$A(1) = e^{-1}$ ou $A(1) = \dfrac{1}{e}$ **(ver nota 2)** 2

Notas:

1. A primeira linha do quadro deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Primeira linha correcta (indicação do zero da derivada e indicação correcta do domínio, de 0 a $+\infty$) 2

Outras situações 0

2. Se o examinando não apresentar o valor exacto como resposta final, a sua resposta deverá ser desvalorizada em 1 ponto.

5. .... **14**

Referir a continuidade de g 2

Concluir que o gráfico de g não tem assimptotas verticais 2

Provar que o gráfico de g não tem assimptotas não verticais, quando $x \to +\infty$ 5

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 2

Conclusão (não existe assimptota não vertical) 2

ou

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ 1

Conclusão (não existe assimptota horizontal) 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 1

Conclusão (não existe assimptota oblíqua) 1

Provar que o gráfico de g não tem assimptotas não verticais, quando $x \to -\infty$ 5

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 1

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 2

Conclusão (não existe assimptota não vertical) 2

ou

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ 1

Conclusão (não existe assimptota horizontal) 1

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 1

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 1

Conclusão (não existe assimptota oblíqua) 1

Nota:
Se o examinando se limitar a verificar o resultado para casos particulares, a cotação a atribuir deve ser de 0 (zero) pontos.

6.1. .... **14**

Calcular $a(0)$ 4

Substituir t por 0 1

$a(0) = \frac{\pi}{3}$ 3

Identificar o pedido com $\operatorname{sen}[a(0)]$ **(ver nota 1)** 7

Resposta final **(ver notas 2 e 3)** 3

Notas:

1. Se o valor obtido para $a(0)$, na etapa anterior, for $\frac{\pi}{2}$ ou qualquer outro valor que não seja amplitude de um ângulo agudo, esta etapa deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se as duas etapas anteriores estiverem correctas.

3. A pontuação relativa a esta etapa deve ser desvalorizada se o examinando não apresentar o valor exacto como resposta final. Essa desvalorização deverá ser de:

- 1 ponto, se o examinando apresentar o valor $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e, em seguida, um seu valor aproximado;
- 2 pontos, se o examinando não apresentar o valor $\frac{\sqrt{3}}{2}$, apresentando directamente um valor aproximado de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$.

6.2. .... **14**

Equacionar o problema $\left(a(t) = \frac{\pi}{2}\right)$ **(ver nota 1)** 6

Resolver a equação 7

$a(t) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\sqrt{9{,}8}\,t\right) = 0$ 1

Concluir que $\sqrt{9{,}8}\,t = \frac{\pi}{2}$ 5

Concluir que $t = \frac{\pi}{2\sqrt{9{,}8}}$ 1

Resposta final $(t \approx 0{,}5)$ **(ver nota 2)** 1

Notas:

1. Qualquer equação que não seja equivalente a $a(t) = \frac{\pi}{2}$ deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às décimas, a cotação a atribuir a esta etapa deverá ser de 0 (zero) pontos.

3. Se, na sua resolução, o examinando obtiver uma equação impossível (como, por exemplo, $\cos\left(\sqrt{9{,}8}\,t\right) = 3$) e, não a reconhecendo como tal, prosseguir a resolução da mesma, todas as etapas subsequentes devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

7. .... **14**

Determinar o máximo de f 5

Apresentar o gráfico correcto, no seu domínio $[1, 2]$ 1

Assinalar no gráfico o ponto de ordenada máxima 2

Indicar o máximo **(ver nota)**.. 2

Referir que o mínimo de f é 1 2

Determinar os valores pedidos 7

Concluir que $a + b = 4$ e $1{,}297\,a + b = 5$ 3

Resolver o sistema 2

Apresentar os valores de a e de b arredondados
às centésimas .... 2 (1+1)

ou

Concluir que $a = \dfrac{1}{1{,}297-1}$ 3

Apresentar o valor de a arredondado às centésimas 1

Concluir que $b = 4 - a$ 2

Apresentar o valor de b arredondado às centésimas 1

Nota:
Aceita-se qualquer valor que pertença ao intervalo $[1{,}2965\,;\ 1{,}2971]$.
Qualquer valor fora deste intervalo deve ser cotado com 0 (zero) pontos.

EXAMES NACIONAIS DO ENSINO SECUNDÁRIO, 2006 – 1.ª FASE **GRELHA DE CLASSIFICAÇÃO DE MATEMÁTICA (Cód. 635)**

Código Confidencial da Escola	Número Convencional da Prova	Versão da Prova	Grupo I								Grupo II												TOTAL Da PROVA (200)
			1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	T1 (63)	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.	5.	6.1.	6.2.	7.	T2 (137)	
			(9)	(9)	(9)	(9)	(9)	(9)	(9)		(10)	(11)	(10)	(10)	(12)	(14)	(14)	(14)	(14)	(14)	(14)		

Data ____/____/____ O Professor Classificador ______________________________________