Grupo I

1. Se (a_n) é uma progressão geométrica, então $a_n = a_1 \times r^{n-1}$, logo $a_4 = a_1 \times r^3 \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{4} \times r^3$

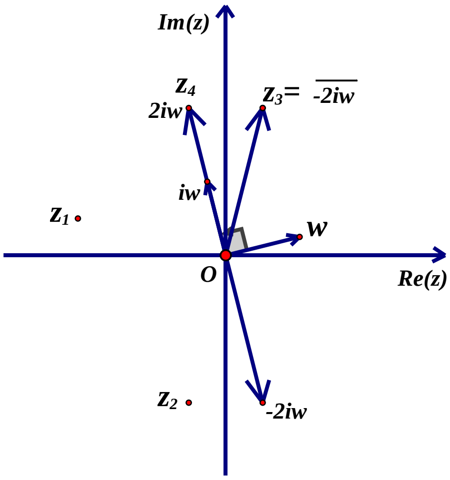
$\Leftrightarrow 8 = r^3 \Leftrightarrow 2 = r$. Então $a_n = \frac{1}{4} \times 2^{n-1}$ e, portanto, $a_{17} = \frac{1}{4} \times 2^{16} \Leftrightarrow a_{17} = 16384$ **(B)**

2. Se o ponto P pertence ao gráfico de f , $f(2) = 8 \Leftrightarrow e^{aln2} = 8 \Leftrightarrow e^{ln2^a} = 8 \Leftrightarrow 2^a = 8 \Leftrightarrow a = 3$. **(C)**

3. O período positivo mínimo da função f é $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$ logo, no intervalo $[0{,}20[$ a função tem dois zeros.

Como no intervalo $[0\,,2000\,[$ existem 100 intervalos equivalentes a $[0{,}20[$, a função tem, no intervalo $[0\,,2000\,[$, 200 zeros. **(B)**

4. Observando a figura onde forma representadas as várias etapas da construção, vemos que a resposta é z_3. **(C)**



5. O número de casos possíveis da experiência é 7×6.

A variável X pode tomar os valores 8, 9 ou 10.

$P(X = 8) = \frac{4\times3}{7\times6} = \frac{2}{7}$ **(B)**

Grupo II

1.

1.1 A função é contínua em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ por ser definida pelo quociente de duas funções contínuas nestes intervalos (a função f, que é a soma de uma função afim com uma função trigonométrica, ambas contínuas, e uma função afim).

Para que g seja contínua em IR é necessário garantir também a continuidade de g em $x = 0$, pelo que tem que ser verdadeira a igualdade: $\lim_{x\to0} g(x) = g(0)$.

$g(0) = e^k - 1$

$$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{-x+sen\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to0}\frac{-x}{x} + \lim_{x\to0}\frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{2\times\frac{x}{2}} = -1+\frac{1}{2}\times\lim_{y\to0}\frac{sen(y)}{y} = -1+\frac{1}{2}\times1 = -\frac{1}{2}$$

Então $\lim_{x\to0} g(x) = g(0) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = e^k - 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + 1 = e^k \Leftrightarrow k = ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Mudança de variável: Seja $y = \frac{x}{2}$; Se $x \to 0$ então $y \to 0$.

1.2 Seja $x \in \,]-2\pi\,,5\pi[: 2f'(x) = \left(f(x)+x\right)^2 - 1 \Leftrightarrow 2\left(-1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \left(-x+sen\left(\frac{x}{2}\right)+x\right)^2 - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2+\cos\left(\frac{x}{2}\right) = sen^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow 1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow -\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow \underbrace{\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -2}_{\text{equação impossível}} \vee \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 4k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$Se \;\; k = 0 \;\; então \;\; x = 0 \;\; e \;\; se \;\; k = 1 \;\; então \;\; x = 4\pi$

As soluções no intervalo dado são: $0 \; e \; 4\pi$.

2.

2.1. Seja $x \in \left]-1, +\infty\right[$

$$f'(x) = \left(\frac{1+\ln(x+1)}{x+1}\right)' = \frac{\left(1+\ln(x+1)\right)' \times (x+1) - \left(1+\ln(x+1)\right) \times (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - \left(1+\ln(x+1)\right)}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1-1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln(x+1) = 0 \wedge \underbrace{(x+1)^2 \neq 0}_{condição\ universal\ em \left]-1,+\infty\right[} \Leftrightarrow \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

x	-1		0	$+\infty$
$-\ln(x+1)$	n.d.	+	0	-
$(x+1)^2$	0	+	+	+
f'	n.d.	+	0	-
f	n.d.	↗	$f(0)$	↘

O único extremo da função neste intervalo é $f(0) = 1$ e é o máximo absoluto, neste intervalo.

2.2.

Para determinar a equação da assíntota horizontal quando $x \to -\infty$, há que calcular o seguinte limite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{-\sqrt{(x-1)^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2+2}{(x-1)^2}}\right) = -\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2+2}{(x-1)^2}} =$

$$= -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x^2-2x+1}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 1} = -1$$

Assim, a reta de equação $y = -1$ é a assíntota horizontal do gráfico da função, quando $x \to -\infty$.

3. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 8z + 4 \leq 0$.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 8z + 4 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + ... + y^2 - 4y + ... + z^2 + 8z + ... \leq -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 + y^2 - 4y + 2^2 + z^2 + 8z + 4^2 \leq -4 + 2^2 + 2^2 + 4^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 \leq 20$$

Concluímos assim que o ponto V tem coordenadas $(2, 2, -4)$.

Uma vez que a esfera contém o ponto $C(4,2,0)$, o vetor $\overrightarrow{VC}=(2,0,4)$ é um vetor normal ao plano tangente à esfera no ponto C, logo uma equação cartesiana do plano é do tipo: $2x+4z+d=0$
Substituindo pelas coordenadas do ponto C obtemos o valor de d:
$2\times 4+4\times 0+d=0 \Leftrightarrow d=-8$
Assim, uma condição cartesiana que define o plano pedido é, por exemplo, $2x+4z-8=0$.

4.

$$P\left((A\cup B)\middle|\overline{A}\right)\underset{(1)}{=}\frac{P\left((A\cup B)\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}\underset{(2)}{=}\frac{P\left(\left(A\cap\overline{A}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\right)}{P\left(\overline{A}\right)}\underset{(3)}{=}\frac{P\left(\Phi\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\right)}{P\left(\overline{A}\right)}\underset{(4)}{=}\frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}\underset{(5)}{=}$$

$$\underset{(5)}{=}\frac{P(B)-P(B\cap A)}{P\left(\overline{A}\right)}\ (*)$$

Sabemos que:

$$P(A)+0,75P(B)=1\Leftrightarrow 0,75P(B)=1-P(A)\underset{(6)}{\Leftrightarrow}0,75P(B)=P\left(\overline{A}\right)$$

$$P(A|B)=0,5\underset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,5\underset{P(B)\neq 0}{\Leftrightarrow}P(A\cap B)=0,5P(B)$$

Logo, (*) $=\dfrac{P(B)-0,5P(B)}{0,75P(B)}=\dfrac{0,5P(B)}{0,75P(B)}\underset{P(B)\neq 0}{=}\dfrac{0,5}{0,75}=\dfrac{2}{3}$

Justificações:

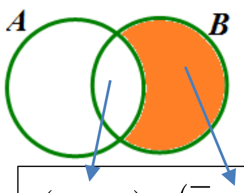
(1) Por definição de probabilidade condicionada.

(2) Pela propriedade distributiva da interseção de acontecimentos em relação à reunião de acontecimentos.

(3) Por definição de acontecimentos contrários.

(4) Pois o acontecimento impossível é o elemento neutro da reunião de acontecimentos.

(5)



$$\boxed{(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=B}$$

(6) Pelo teorema da probabilidade do acontecimento contrário.

5. $$\frac{z+\overline{w}-(\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(w))\times i^{195}}{1-i}=\frac{3+i+\overline{(-1+i)}-(3-1)\times i^{4\times 48+3}}{1-i}=\frac{3+i+(-1-i)-2\times i^{3}}{1-i}=\frac{3+i-1-i-2\times(-i)}{1-i}=$$

$$=\frac{2+2i}{1-i}=\frac{(2+2i)\times(1+i)}{(1-i)\times(1+i)}=\frac{2+2i+2i-2}{1^2+1^2}=\frac{4i}{2}=2i$$

Como a parte real de $2i$ é zero e o seu coeficiente imaginário é diferente de zero, $2i$ é um imaginário puro.

6. Uma vez que a segunda derivada, f'', da função f tem domínio IR, f' tem também domínio IR e portanto f é necessariamente uma função contínua em IR pelo que o gráfico **IV** está errado pois a função representada apresenta um ponto de descontinuidade.

Uma vez que $f(1) \times f(4) > 0$, as imagens de 1 e 4 têm que ter o mesmo sinal o que não acontece na função representada no gráfico **II** pelo que este gráfico não pode corresponder à função f.

Como $f''(x) = g(x) \times (x^2 - 5x + 4)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) \times (x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \vee x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow eq. imp. \vee x = 1 \vee x = 4$

O sinal de f'' é dado pelo sinal da função definida por $x^2 - 5x + 4$ uma vez que a função g é positiva em IR.

Assim , por observação da tabela seguinte, concluímos que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1]$ e em $[4, +\infty[$ pelo que o gráfico **I** está também excluído.

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
f''	+	0	-	0	+
f	$\cup$	$f(1)$	$\cap$	$f(4)$	$\cup$

Assim o gráfico que pode representar a função f é o **III**.