FICHA DE AVALIAÇÃO

Duração: 90 min | 06.02.2015

12.º Ano – Turma

Utilize apenas caneta ou esferográfica, de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de material de desenho e de medição, assim como de uma calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, indique a numeração do grupo e do item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Para cada item, apresente apenas uma resposta.

O teste inclui um formulário na página 2.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado do teste.

O grupo II está dividido em duas partes (PARTE A e PARTE B).

Os itens da PARTE B devem ser resolvidos em folha à parte e sem calculadora gráfica.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \, \cos b + \text{sen}\,b \, \cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos a \, \cos b - \text{sen}\,a \, \text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \, \text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho \,\text{cis}\,\theta)^n = \rho^n \text{cis}\,(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \,\text{cis}\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\, \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'\,\cos u$

$(\cos u)' = -u'\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

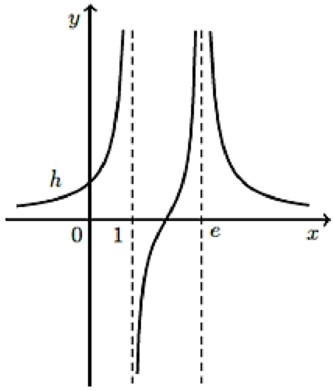
Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta.
Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1, e\}$.

Tal como a figura sugere, as retas de equação $y = 0$, $x = 1$ e $x = e$ são as assíntotas do gráfico da função h.

Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim \mathrm{h}(x_n) = +\infty$.

Qual das expressões seguintes não pode ser termo geral da sucessão (x_n)?



(A) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **(B)** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$ **(C)** $1-\frac{1}{n}$ **(D)**

$e+\frac{1}{n}$

2. Uma variável aleatória X tem distribuição normal com valor médio 20.

Sabe-se que $P(X > 25) = P(X < a)$

Qual dos seguintes pode ser o valor de a ?

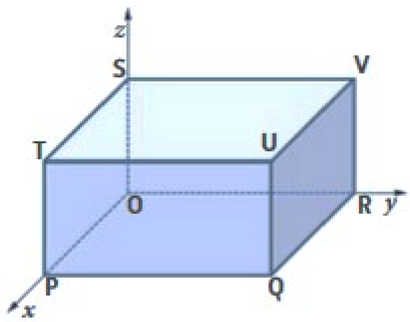
(A) 15 **(B)** 22 **(C)** 13 **(D)** 18

3. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = \sqrt{\log_a(2-x)}$, sendo $a \in \left]1,+\infty\right[$.

O domínio da função f é:

(A) $\left]-\infty , 1\right]$ **(B)** $\left]1 , 2\right]$ **(C)** $\left]-\infty , 2\right[$ **(D)** $\left[1 , 2\right[$

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo.



- o vértice O é a origem do referencial;
- o vértice P pertence ao eixo Ox ;
- o vértice R pertence ao eixo Oy ;
- o vértice S pertence ao eixo Oz ;
- o vértice U tem coordenadas (2,4,2)

Considere a reta r definida por $(x, y, z) = (2,2,2) + k(0,1,0), \quad k \in \mathbb{R}$

Escolhem-se ao acaso dois vértices distintos do paralelepípedo.

Considere os acontecimentos:

X :" Os dois vértices definem uma reta estritamente paralela à reta r "

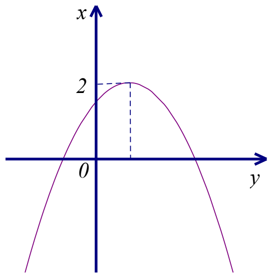
Y :" Os dois vértices definem uma reta contida no plano de equação $z = x$ "

Qual é o valor da probabilidade $P(Y / X)$?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

5. Considere a função quadrática f, representada graficamente, e a função g, real de variável real, definida por $g(x) = 4 - \log_2(x)$.

Sabendo que $D'_f = \left]-\infty, 2\right]$, qual é o contradomínio da função $g \circ f$?



(A) $\left[-3, +\infty\right[$ **(B)** $\left]0, 3\right]$ **(C)** $\left[3, +\infty\right[$ **(D)** $\left]-\infty, 3\right]$

Grupo II **Parte A**

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere o conjunto A de todos os números de quatro algarismos menores do que 4000 que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Escolhe-se, simultaneamente e ao acaso, três elementos do conjunto A.

Qual é a probabilidade de serem ímpares e terem os algarismos todos diferentes?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), tais que:

$P(\overline{A}) = 0{,}3$ $P(B) = 0{,}4$ $P(A \cup \overline{B}) = 0{,}7$

Determine o valor da probabilidade condicionada $P(A/B)$.

3. Prove que $\ln(3) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + ... + \ln\left(\frac{3}{1024}\right) = \ln\left(\left(\frac{3}{32}\right)^{11}\right)$.

Sugestão: Poderá ser útil reparar que se trata da soma de termos consecutivos de uma progressão aritmética.

4. Considere as seguintes afirmações:

(A) A função, real de variável real, definida por $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ tem inversa.

(B) $\left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^3 \Leftrightarrow x > 3, \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

(C) As equações $\ln(x^2) = 4$ e $2\ln(x) = 4$ são equivalentes.

(D) A função, real de variável real, definida por $h(x) = \log_2(|x|)$ é ímpar.

Numa pequena composição indique qual o valor lógico de cada uma das afirmações, justificando as falsas.

5. Considere as funções reais de variável real f e g definidas por:

$f(x)=2-\log_3(x)$ e $g(x)=-5e^{6-2x}-3e^{3-x}+6$.

Sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, determine o conjunto solução da equação $g(x)=f\left(\frac{1}{9}\right)$.

6. Considere a representação gráfica, num referencial o.n. xOy, da função g, de domínio $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ definida por $g(x)=\ln(x^2-2x)$.

Considere o triângulo [AOB], em que A e B são dois pontospertencentes ao gráfico de g, tais que:

- A pertence ao segundo quadrante e tem abcissa a;
- B pertence ao primeiro quadrante e tem abcissa b;
- $a+b=2$;
- A e B têm a mesma ordenada.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A para o qual a área do triângulo [AOB] é 5.

Na sua resposta deve:

- Escrever a expressão que dá a área do triângulo [AOB] em função da abcissa, a, do ponto A;
- Equacionar o problema;
- Reproduzir, num referencial, o gráfico ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- Indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às décimas.

FIM da PARTE A

COTAÇÕES

Grupo I ………………………….……. (5 x 10 pontos) …………..…………..……… 50 pontos

Grupo II (Parte A) ………………………………………………….……………110 pontos

1. ………………………………………………………… 18 pontos

2. ………………………………………………………… 20 pontos

3. ………………………………………………………… 14 pontos

4. …………………………………………………………18 pontos

5. ………………………………………………………… 20 pontos

6. ………………………………………………………… 20 pontos

Total ……………………..……………………..……………………………………… 160 pontos

GRUPO II PARTE B

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

7. O momento sísmico, M_0, é uma medida da quantidade total de energia que se transforma durante um sismo. Só uma pequena fração do momento sísmico é convertida em energia sísmica irradiada, E, que é a que os sismógrafos registam.

A energia sísmica irradiada é estimada, em Joules, por $E = M_0 \times 1{,}6 \times 10^{-5}$.

A magnitude, M, de um sismo é estimada por $M = \frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2{,}9$

Resolva as duas alíneas seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

7.1 Admita que um sismo que ocorreu no Haiti, em 2010, teve magnitude 7,1.

Determine o momento sísmico, M_0, para esse sismo.

Escreva o resultado na forma $a \times 10^n$, com n inteiro relativo e com a entre 1 e 10.

7.2 Sejam M_1 e M_2 as magnitudes de dois sismos.

Mostre que, se a diferença entre a magnitude M_1 e a magnitude M_2 é igual a $\frac{2}{3}$, então a energia sísmica irradiada por um dos sismos é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo outro sismo.

FIM da PARTE B

COTAÇÕES

Grupo II (Parte B)………………………………………………………………… 40 pontos

7. **……………………………………………………………… 40 pontos**

7.1 …………………………………..20 pontos

7.2 …………………………………..20 pontos