Grupo I

1. Reparem que:

$\lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=e^-$, logo $\lim[h(x_n)]=+\infty$

$\lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right]=(1+0)^3=1^+$, logo $\lim[h(x_n)]=-\infty$

$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-0=1^-$, logo $\lim[h(x_n)]=+\infty$.

$\lim\left(e+\frac{1}{n}\right)=e+0=e^+$, logo $\lim[h(x_n)]=+\infty$

2. $P(X>25)=P(X<a)$, sendo o valor médio 20, significa que os valores a e 25 estão igualmente afastados do valor médio. Assim o valor de a é 15.

3. $D_f=\{x\in IR: 2-x>0\wedge \log_a(2-x)\geq 0\}$

$2-x>0\wedge\log_a(2-x)\geq 0 \Leftrightarrow -x>-2 \underset{(1)}{\wedge} 2-x\geq a^0 \Leftrightarrow x<2\wedge -x\geq 1-2 \Leftrightarrow x<2\wedge x\leq 1\Leftrightarrow x\leq 1$ (1)

Atendendo a que a função definida por $y=\log_a(x)$ é estritamente crescente, uma vez que $a>1$.

Assim $D_f=\left]-\infty,1\right]$.

4. Notar que a reta r é paralela ao eixo Oy o que é indicado pelo vetor diretor da reta, de coordenadas $(0,1,0)$ e contém o ponto U, logo a reta r é a reta TU. Comecemos por pensar no número de elementos do acontecimento X que é o número de retas, estritamente paralelas à reta TU, que é possível definir escolhendo dois vértices distintos do paralelepípedo, ou seja, 3 retas (as retas PQ, OR e SV). O número de elementos de Y que também pertencem a X, ou seja $\#(Y\cap X)$, é o número de retas estritamente paralelas à reta TU e contidas no plano de equação $z=0$, ou seja 2 retas (as retas PQ e OR). Assim $P(Y/X)=\frac{\#(Y\cap X)}{\#X}=\frac{2}{3}$.

5. $(g\circ f)(x)=g(f(x))=4-\log_2(f(x))$

Atendendo a que, no domínio da função g, temos $f(x)>0$, e atendendo ao contradomínio da função f :

$0<f(x)\leq 2\underset{(1)}{\Leftrightarrow}\log_2(f(x))\leq\log_2 2\Leftrightarrow -\log_2(f(x))\geq -1\Leftrightarrow 4-\log_2(f(x))\geq -1+4\Leftrightarrow 4-\log_2(f(x))\geq 3$

,logo $D'_{g\circ f}=\left[3,+\infty\right[$ (1) Atendendo a que a função definida por $y=\log_2 x$ é estritamente crescente

Grupo II **Parte A**

1. O número de elementos de A é $3\times 7\times 7\times 7=1029$. A experiência consiste em escolher, simultaneamente e ao acaso três elementos do conjunto A, logo o número de casos possíveis é dado por ${}^{1029}C_3$.

O número de casos favoráveis é o número de maneiras de escolher três elementos do conjunto A, que sejam ímpares e tenham os algarismos todos diferentes.

Vejamos quantos são esses números:

$$2\times5\times4\times3 \quad + \quad 1\times5\times4\times4 \quad =120+80=200$$

Números iniciados por 1 ou por 3	Só podem terminar em 3,5 ou 7 (ou em 1, 5 ou 7)	Números iniciados por 2	Só podem terminar em 1,3,5 ou 7.

Então o número de casos favoráveis é o número de maneiras de escolher três elementos deste conjunto, ou seja, ${}^{200}C_3$.

A probabilidade pedida é $\dfrac{{}^{200}C_3}{{}^{1029}C_3} \approx 0{,}007$.

2. $P(\overline{A})=0{,}3 \Leftrightarrow 1-P(A)=0{,}3 \Leftrightarrow P(A)=0{,}7$

$P(B)=0{,}4 \Leftrightarrow P(\overline{B})=0{,}6$

$P(A\cup\overline{B})=0{,}7 \Leftrightarrow P(A)+P(\overline{B})-P(A\cap\overline{B})=0{,}7 \Leftrightarrow 0{,}7+0{,}6-P(A\cap\overline{B})=0{,}7 \Leftrightarrow P(A\cap\overline{B})=0{,}6$

$P(A\cap\overline{B})=0{,}6 \Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=0{,}6 \Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}1$ Seja Ω o espaço de resultados

$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}1}{0{,}4}=0{,}25$.

3. Reparemos que a progressão aritmética tem de termo geral $\ln\left(\dfrac{3}{2^{n-1}}\right)$, logo uma vez que a última parcela da soma é $\ln\left(\dfrac{3}{1024}\right)$, ou seja, $\ln\left(\dfrac{3}{2^{11-1}}\right)$ trata-se da soma de 11 parcelas consecutivas.

Então $S_{11}=\dfrac{\ln(3)+\ln\left(\dfrac{3}{2^{10}}\right)}{2}\times11 \Leftrightarrow S_{11}=\dfrac{\ln\left(3\times\dfrac{3}{2^{10}}\right)}{2}\times11 \Leftrightarrow S_{21}=\dfrac{1}{2}\times\ln\left(\dfrac{3^2}{2^{10}}\right)\times11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{21}=\ln\left(\sqrt{\dfrac{3^2}{2^{10}}}\right)\times11 \Leftrightarrow S_{21}=\ln\left(\dfrac{3}{2^5}\right)\times11 \Leftrightarrow S_{21}=\ln\left(\dfrac{3}{32}\right)\times11 \Leftrightarrow S_{21}=\ln\left[\left(\dfrac{3}{32}\right)^{11}\right]$ $c.q.d.$

4. A afirmação (A) é verdadeira pois a função definida por $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ é injetiva, logo tem inversa.

Nota: Uma vez que não se exigia a justificação das afirmações verdadeiras, bastava recorrer à visualização do gráfico na calculadora.

A afirmação (B) é falsa pois se $0<a<1$ então $\dfrac{1}{a}>1$ e, assim sendo, a função definida por $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ é estritamente crescente e portanto $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x<\left(\dfrac{1}{a}\right)^3 \Leftrightarrow x<3$.

A afirmação (C) é falsa pois a primeira equação tem duas soluções e a segunda equação só tem uma solução.

$\ln(x^2)=4 \Leftrightarrow x^2=e^4 \wedge x\in IR\setminus\{0\} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{e^4}$ e $2\ln(x)=4 \Leftrightarrow x=e^2 \wedge x\in IR^+ \Leftrightarrow x=e^2$

A afirmação (D) é falsa pois $h(-x)=\log_2(|-x|)=\log_2(|x|)=h(x), \quad \forall x \in IR \setminus \{0\}$, logo a função h é par. (Como a única função que é simultaneamente par e ímpar é a função constante e igual a zero esta função, sendo par, não é ímpar.)

5. $g(x)=f\left(\frac{1}{9}\right) \Leftrightarrow -5e^{6-2x}-3e^{3-x}+6=2-\log_3\left(\frac{1}{9}\right) \Leftrightarrow -5e^{6-2x}-3e^{3-x}+6=2-(-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5e^{6-2x}-3e^{3-x}+2=0 \Leftrightarrow (1)$

<u>Cálculos auxiliares:</u>

Notando que $e^{6-2x}=\left(e^{3-x}\right)^2$, fazemos a seguinte mudança de variável: $y=e^{3-x}$ e obtemos a equação do segundo grau: $-5y^2-3y+2=0$

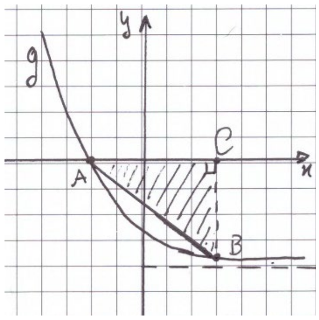
Resolvendo esta equação obtemos os valores de y:

$$-5y^2-3y+2=0 \Leftrightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{-10} \Leftrightarrow y=-1 \vee y=\frac{2}{5}$$

Então $(1) \Leftrightarrow e^{3-x}=-1 \vee e^{3-x}=\frac{2}{5} \Leftrightarrow \textit{Equação impossível} \vee 3-x=\ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow x=-\ln\left(\frac{2}{5}\right)+3$

C.S= $\left\{-\ln\left(\frac{2}{5}\right)+3\right\}$

6. Em primeiro lugar, para melhor interpretar o problema devemos visualizar o gráfico da função g e desenhar um possível triângulo nas condições pedidas.



A abcissa do ponto A é a solução da equação $g(x)=0$, logo é -2.

($2^{-x}-4=0 \Leftrightarrow 2^{-x}=4 \Leftrightarrow x=-2$)

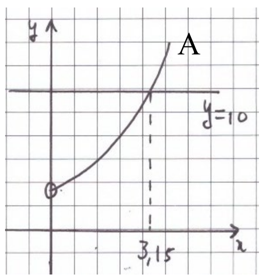
Seguidamente devemos escrever uma expressão que traduza a área do triângulo [OAB] em função da abcissa do ponto B. Seja x a abcissa do ponto B. Notar que, como B pertence ao 4º quadrante, $x>0$, logo o domínio da nova função é IR^+.

Atendendo a que a base do triângulo é, por exemplo, $\overline{AC}=2+x$ e que a altura correspondente é $\overline{CB}=|g(x)|$,

$$A(x)=\frac{(2+x)\times\left|2^{-x}-4\right|}{2}, \; D_A=IR^+.$$

Pretende-se resolver graficamente a seguinte equação: $\frac{(2+x)\times\left|2^{-x}-4\right|}{2}=10$.

Para isso esbocemos no mesmo referencial, tendo em atenção o domínio da função A, o gráfico da função A e reta de equação $y=10$ determinando de seguida a abcissa do ponto de interseção, sendo essa a resposta ao problema colocado.



Na calculadora introduzimos as expressões $y_1=\frac{(2+x)\times\left|2^{-x}-4\right|}{2}$ e $y_2=10$.

A abcissa do ponto de interseção dos gráficos é, aproximadamente, 3,15.