Correcção do 3º Teste de Matemática-12ºC Ano lectivo 2007/2008

Grupo 1 (Versão 1)

1. A resposta certa é $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to 2^-} f(x)}=\frac{1}{0^-}-\infty$ (B)
2. Como $u_n \to 2^-$, $\lim h(u_n)=\lim_{x\to 2^-} h(x)=0$ (A)
3. $f(2)=5 \Leftrightarrow \frac{e^{2-1}}{a}=5 \Leftrightarrow e=5a \Leftrightarrow a=\frac{e}{5}$

   Logo $\ln a=\ln\left(\frac{e}{5}\right)=\ln e-\ln 5=1-\ln 5$ (D)
4. Se o referido grupo actua em 2º lugar resta contar as maneiras de distribuir os restantes 4 grupos pelas restantes 4 posições. Logo ${}^4A_4$. (A)
5. A afirmação necessariamente falsa é " $y=x$ é assímptota do gráfico de *g*.", uma vez que é dito que as rectas de equações $y=1$ e $y=-1$ são assímptotas horizontais do gráfico de *g* e portanto não poderá existir neste gráfico mais nenhuma assímptota não vertical. (D)
6. A velocidade média nos primeiros 4 segundos é a taxa média de variação da função no intervalo $[0,4]$.

   Portanto $t.m.v._{[0,4]}=\frac{d(4)-d(0)}{4-0}=\frac{80-0}{4}=20$ (C)
7. Das três transformações necessárias para obter o gráfico de j a partir do gráfico de h, a única que afecta o domínio é dada por $h(x+3)$ que faz com que o gráfico se desloque na horizontal três unidades para a esquerda. Logo o domínio da nova função é $[-4,0]$

Grupo II

1.

1.1 A:" as bolas retiradas terem cores diferentes"

Nº casos possíveis = 6x8=48

Nº casos favoráveis = 2x3+4x5=26 $P(A)=\frac{26}{48}=\frac{13}{24}$

1.2 B:" as 5 bolas saírem alternadamente brancas e azuis"

Nº casos possíveis = ${}^{14}A_5$

ABABA ou BABAB

Nº casos favoráveis = 7x7x6x6x5 + 7x7x6x6x5 = 2x7x7x6x6x5

$$P(B)=\frac{2\times7\times7\times6\times6\times5}{14\times13\times12\times11\times10}=\frac{21}{286}$$

2.

2.1 A função tem domínio IR e é contínua pois é a soma de uma função constante com a composta de uma função afim e uma função exponencial e todas estas funções são contínuas em IR.

Sendo assim não existem assímptotas não verticais no gráfico da função.

Averiguemos a existência de assímptotas horizontais.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}+e^{1-x}\right) = \frac{1}{3}+e^{-\infty} = \frac{1}{3}+0 = \frac{1}{3}$, logo a recta de equação $y=\frac{1}{3}$ é assímptota horizontal quando $x\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}+e^{1-x}\right) = \frac{1}{3}+e^{+\infty} = \frac{1}{3}+(+\infty) = +\infty$, logo não existe ass. Horizontal quando $x\to-\infty$

2.2 $f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}+e^{1-x}=1 \Leftrightarrow e^{1-x}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 1-x=\ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x=1-\ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\ln e-\ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{e}{\frac{2}{3}}\right) \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{3}{2}e\right)$

3.

3.1 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} =$

$= \lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = = \lim\limits_{x\to1^+}\left(\sqrt{x+3}+2\right) = 4$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\ln(1-x) = \ln(0^+) = -\infty$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

3.2 Se não existe $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, *f* é descontínua em $x=1$. Mas $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1)$ logo f é contínua à direita em $x=1$.

3.3 $f(x)=x-2 \Leftrightarrow f(x)-x+2=0$. Seja $g(x)=f(x)-x+2$

No intervalo $[7,8]$ a função g é contínua porque é a diferença entre duas funções contínuas, f(x) (contínua por ser o quociente de duas funções contínuas) e x+2 (contínua por ser afim).

$g(7)=\frac{7-1}{\sqrt{7+3}-2}-7+2>0$

$g(8)=\frac{8-1}{\sqrt{8+3}-2}-8+2<0$ logo $g(7)\times g(8)<0$ e portanto pelo Corolário do teorema de Bolzano, $\exists c\in\left]7,8\right[: g(c)=0$. A solução da equação dada é *c*.

3.4 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)-\ln(1-0)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{(1)}{=}} = \lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{-y} =$

$= \lim\limits_{y\to0} -\frac{\ln(1+y)}{y} \underset{(2)}{=} -1_{c.q.p.}$

(1)Mudança de variável:

Seja $y=-x$

Se $x\to0$ então $y\to0$

(2) Pelo limite notável.

3.5 A equação reduzida será $y = mx + b$.

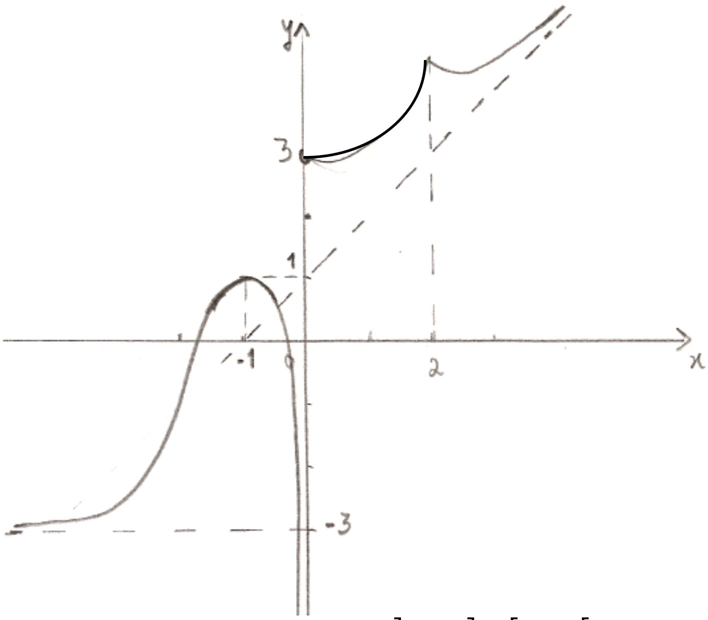
m é o declive da recta e portanto é o valor de $f'(0)$ ou seja -1.

Vem então $y = -x + b$

Para determinar b consideremos o ponto em comum entre a recta tangente e o gráfico da função, o ponto de coordenadas $(0, f(0))$, ou seja $(0,0)$.

Logo a equação pedida é $y = -x$.

4. Exemplo de um possível gráfico:



Neste caso, $D_g = IR$ e $D'_g =]-\infty,1] \cup [3,+\infty[$