COLÉGIO PAULO VI

Teste 3 –Turma 2

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos | 24.01.2013

12.º Ano de Escolaridade

O teste tem um formulário na página 2 e termina com a palavra ***FIM.***

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\,,\; k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1\, p_1 + \ldots + x_n\, p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1-\mu)^2\, p_1 + \ldots + (x_n-\mu)^2\, p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folhas de respostas apenas **o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Um dado octaédrico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 8 é lançado doze vezes. Indique qual dos acontecimentos seguintes tem probabilidade igual a $1-\left(\frac{7}{8}\right)^{12}-{}^{12}C_1\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{7}{8}\right)^{11}-{}^{12}C_2\times\left(\frac{1}{8}\right)^{2}\times\left(\frac{7}{8}\right)^{10}$.

(A) A face 7 sair pelo menos duas vezes.
(B) A face 7 sair pelo menos três vezes.
(C) A face 7 sair no máximo duas vezes.
(D) A face 7 sair no máximo três vezes.

2. Sete amigos vão ao futebol ver um desafio entre o clube Alfa e o clube Beta. Três deles são adeptos do clube Alfa e quatro deles são adeptos do clube Beta. No estádio sentam-se na mesma fila, uns ao lado dos outros, distribuídos ao acaso. Qual é a probabilidade de os adeptos do clube Alfa ficarem todos juntos e os adeptos do clube Beta ficarem também todos juntos, estando os adeptos do clube Alfa à direita dos adeptos do clube Beta?

(A) $\frac{3!\times4!}{7!}$ **(B)** $\frac{2}{3!\times4!}$ **(C)** $\frac{2\times3!\times4!}{7!}$ **(D)** $\frac{1}{3!\times4!}$

3. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x)=-2a^{-x}-b$, sendo a e b números reais, com $a>1$.
Qual dos seguintes conjuntos pode ser o contradomínio desta função?

(A) $]b,+\infty[$ **(B)** $]-b,+\infty[$ **(C)** $]-\infty,b[$ **(D)** $]-\infty,-b[$

4. Sejam a e b dois números reais positivos, com $a\neq1$. Se $a^{7-\log_a(b^2)}=8$, então:

(A) $a^7+2b=8$ **(B)** $a^7=\frac{8}{b}$ **(C)** $a^7=16b$ **(D)** $a^7=8b^2$

5. Sejam a e b dois números reais positivos, com $a\neq1$ e tais que $b^2=a^c$.
Qual das expressões seguintes é equivalente a $\log_a(ab)$?

(A) $a+2c$ **(B)** $1+\sqrt{c}$ **(C)** $a+\frac{c}{2}$ **(D)** $1+\frac{c}{2}$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.
Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato.**

1. Uma caixa contém quatro fichas com o número 1 e três fichas com o número 2, indistinguíveis ao tato. Retiram-se, ao acaso e de uma só vez, duas fichas.

Seja X a variável aleatória " soma dos números inscritos nas duas fichas".

Construa a tabela de distribuição de probabilidade da variável X.

2. Um saco contém nove bolas numeradas de 1 a 9, indistinguíveis ao tato.

As bolas numeradas com um número ímpar são encarnadas e as bolas numeradas com um número par são brancas.

Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, três bolas do saco.

Considere os acontecimentos:

A:« a primeira bola extraída é encarnada»

B:«a segunda bola extraída é branca»

C:«a soma dos números das três bolas extraídas é ímpar».

Sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P(C/(A \cap B))$.

Numa pequena composição explique a sua resposta.

3. Para dissolver o açúcar enche-se o recipiente com água. Admite que a massa de açúcar ainda não dissolvido, t minutos após o início do processo de dissolução, é dada, em gramas, por:

$m(t) = 50 \times e^{-kt}, t \geq 0, k \in R^+$

3.1 Determine k, com aproximação às milésimas, supondo que ao fim de meia hora estão 10 gramas de açúcar por dissolver.

3.2 Mostre que $\dfrac{m(t+2)}{m(t)}$ é constante.

3.3 Suponha agora que $k = 0{,}03$ e determine ao fim de quanto tempo a quantidade de açúcar não dissolvido se reduziu a metade.

4. Determine o domínio da função real de variável real definida por:

$h(x) = e^x - \sqrt{6 - \log_2(x)}$.

5. Resolva, em R, a seguinte inequação: $3^x + 2 \times 3^{-x+1} - 5 > 0$.

6. Considere, num referencial o.n. xOy, os gráficos das funções f e g, de domínio $[0,3]$, definidas por $f(x) = \ln(x+1)$ e $g(x) = e - e^{x-2}$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Determine a área de um triângulo [OAB], com aproximação às décimas, <u>recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.</u>

Para construir o triângulo [OAB], percorra os seguintes passos:

- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda:

➢ a origem do referencial;

➢ o ponto A de intersecção do gráfico das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas;

➢ o ponto B de intersecção do gráfico da função g com o eixo Ox .

7. A magnitude aparente (m) e a magnitude absoluta (M) de uma estrela são grandezas utilizadas em Astronomia para calcular a distância (d) a que essa estrela se encontra da Terra.

As três variáveis estão relacionadas pela fórmula $10^{0,4(m-M)} = \dfrac{d^2}{100}$.

(d é medida em parsec, unidade utilizada em Astronomia para grandes distâncias)

Prove que, para quaisquer m , M e d , se tem: $m = M - 5(1 - \log_{10} d)$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I ....**(5 x 10 pontos)** .... **50 pontos**

Grupo II...**150 pontos**

1. .... **20 pontos**

2. .... **15 pontos**

3. .... **50 pontos**

3.1 ....**15 pontos**

3.2 ....**15 pontos**

3.3 ....**20 pontos**

4. .... **15 pontos**

5. .... **15 pontos**

6. .... **15 pontos**

7. .... **20 pontos**

Total .... **200 pontos**