COLÉGIO PAULO VI
Ficha de Avaliação de Matemática

22 de Março de 2004 12º ano

Para cada uma das questões do grupo I **seleccione a resposta correcta** de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva **na folha de teste** a letra que corresponde à sua opção.
Atenção! Se apresentar mais de uma resposta, ou resposta ambígua, a questão será anulada.

Grupo I

1. Num saco estão 20 bolas vermelhas. Pretende-se introduzir um certo número de bolas amarelas no saco, de tal forma que, ao tirarmos uma bola, a probabilidade de ela ser amarela seja maior que 0,1.
   Quantas bolas amarelas se devem introduzir no saco?

   (A) Exactamente 3 (B) Exactamente 2

   (C) No mínimo 3 (D) No mínimo 2

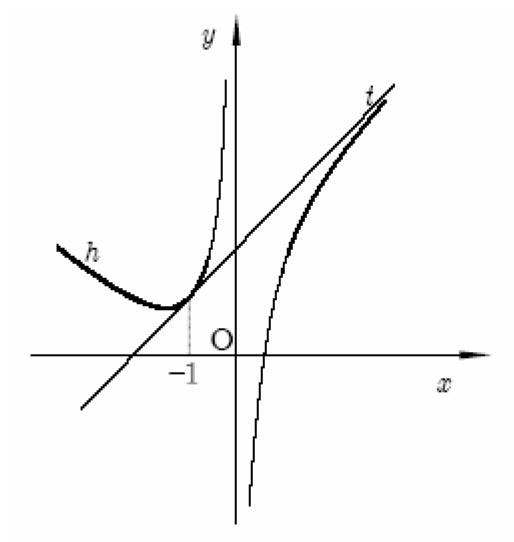
2. Na figura estão representadas parte do gráfico de uma função h, de domínio $R\setminus\{0\}$ e a recta t, assímptota do gráfico de h e tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa -1. Qual é a proposição verdadeira?

   (A) $h'(-1)=\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

   (B) $h'(-1)=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}$

   (C) $h'(-1)=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{x}$

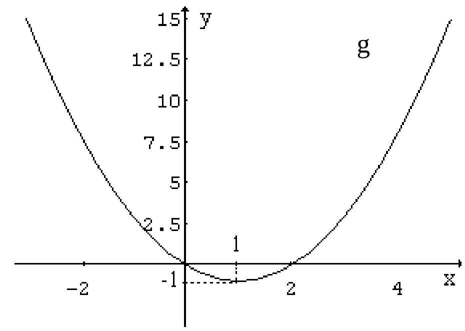
   (D) $h'(-1)=\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$



3. Considera as seguintes afirmações:
   (1) O gráfico de uma função de domínio R não admite assímptotas verticais.
   (2) Se **a** é um zero da derivada de uma dada função g então a função g admite para x = a um máximo ou um mínimo relativos.
   (3) Se h é contínua em $x=a$ então existe $h'(a)$

   Podemos afirmar que:
   (A) as afirmações são todas falsas
   (B) as afirmações são todas verdadeiras
   (C) Só as afirmações (1) e (2) são verdadeiras
   (D) Só as afirmações (2) e (3) são falsas

4. Observa o gráfico da função g .



Relativamente ao domínio da função $\frac{1}{\sqrt{g}}$,

podemos concluir que é:

(A) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ (B) $]0, 2[$

(C) $[0, 2]$ (D) $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

5. Quando se altera a ordem dos algarismos do número 35142, obtém-se outro número.
Considere todos os números que se podem obter por alteração da ordem dos algarismos de 35142.
Quantos desses números são múltiplos de 5?

(A) 24 (B) 12 (C) 120 (D) 60

6. Uma função f , de domínio R , tem um zero no intervalo $[-1,2]$.
Qual das expressões seguintes define uma função que tem, necessariamente, um zero no intervalo $[-5,-2]$?

(A) $f(x)-4$ (B) $|f(x)|+4$ (C) $f(x+4)$ (D) $f(x-4)$

7. Considere a função f , de domínio R, definida por $f(x)=e^{x+3}$
Indique qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função f .

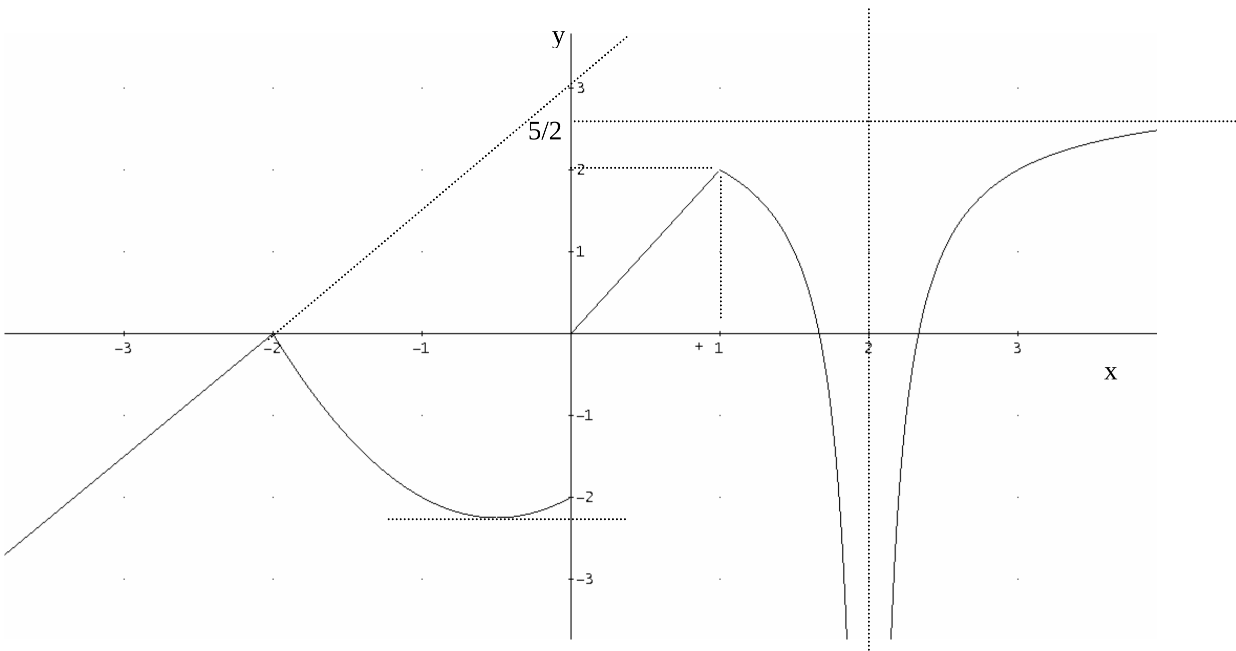
(A) $(\ln 2, 2e^3)$ (B) $(-1, \ln 2)$ (C) $(-3,0)$ (D) $(\ln 5, 8)$

Grupo II

Na resolução deste grupo deve apresentar todos os esquemas e cálculos que traduzam o seu raciocínio e todas as justificações julgadas necessárias. Sempre que não se indicar a aproximação pretendida deve ser indicado o valor exacto.

1. Numa turma do 12º ano efectuou-se um estudo acerca da importância de se estudar com regularidade uma determinada disciplina. Apurou-se que 80% dos que estudavam com regularidade obtinham nota positiva enquanto que apenas 10% dos que não estudavam o conseguiam.
Nessa turma 40% dos alunos estudavam regularmente.
Escolhido ao acaso um aluno dessa turma, determine a probabilidade de ele obter nota positiva.

2. Na figura seguinte está parte da representação gráfica de uma função real de variável real f. As rectas de equações $x = 2$ e $y = \frac{5}{2}$ são assímptotas do gráfico de f.



Indica o valor das seguintes expressões:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - 2}{x^2 - 1}$

h) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{f(x)}$

i) $f'(0^+)$

j) $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

k) $f'(-2^-)$

3. Considere a função $g(x)=\begin{cases} -x^2+12 & se\ x\leq 3 \\ e^{-x+3}+2 & se\ x>3 \end{cases}$

3.1 A função é contínua no ponto de abcissa 3? Justifique.

3.2 Existe um objecto a, tal que $a\in\left]3,5\right[$ e $g(a)=\frac{5}{2}$.

3.2.1 Recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, prove a existência do objecto a.

3.2.2 Calcule o valor exacto de a.

3.3 Calcule $g'(1)$ recorrendo à definição de derivada num ponto. Qual o significado do resultado obtido em relação ao gráfico da função g?

3.4 Determine a equação da recta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 1.

4. Considere a função f, de domínio R^+, definida por $f(x)=3x-2\ln x$

4.1 Estude f quanto à existência de assímptotas do seu gráfico.

4.2 Mostre que a função f tem um único mínimo.

4.3 O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é o quadrado da abcissa. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa desse ponto (apresente o resultado arredondado à décimas).
Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

5. Considere A e B dois acontecimentos possíveis de um espaço de resultados S.
Prove que:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)+P(B)=P(A)+P\left(\overline{A}/B\right)\times P(B)$$

FIM