

- Funções exponencial e logarítmica

1. Resolva as equações:

a)  $\frac{8}{6^x} = 3^{-x}$                       b)  $9^x - 6 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$

2. Determine, em  $\mathfrak{R}$ ,  $x$ , tal que:

a)  $0,5^{x^2} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{3x}$                       b)  $\left(\frac{1}{6}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^x$                       c)  $25^{x-1} > 5$

3. 3.1) Construa o gráfico da função  $f: x \mapsto 3^x$

3.2) A partir do gráfico de  $f$  construa os gráficos de:

a)  $g(x) = f(x) + 1$ ;

b)  $h(x) = -1 - f(x)$ ;

c)  $i(x) = f(x-1)$ ;

d)  $j(x) = f(x+1)$ ;

e)  $l(x) = f(-x)$ ;

f)  $m(x) = f(|x|)$ ;

g)  $n(x) = |f(x)|$ .

4. Num lago onde não existiam trutas foi lançada determinada quantidade de peixes com um ano de idade. O número de trutas vivas após  $t$  anos é dado por  $N = 5000 \times e^{-0,1t}$

a) Quantas trutas foram lançadas ao lago?

b) Ao fim de quantos anos existirão 3000 trutas no lago?

c) Se o modelo continuar a poder aplicar-se, qual o número de trutas passados *muitos* anos?

5. Os veterinários usam pentobarbitol de sódio para anestésiar animais.

Suponha que a dose  $d$  (em miligramas) necessária para anestésiar um cachorro de 20 Kg, durante o tempo  $t$  (em horas) é dada por

$$d(t) = 600 \times 2^{\frac{t}{4}}$$

a) Qual a dose necessária para anestésiar um cachorro com o peso indicado, durante 90 minutos?

b) Durante quanto tempo fica anestésiado um cachorro de 20 Kg se lhe for aplicada uma dosagem de 0,9 gramas?

6. Calcule o valor dos números reais:

a)  $x = \log_3 27$     b)  $y = \log_5 \frac{1}{125}$     c)  $z = \log_2 \sqrt{8}$     d)  $t = \log_{\sqrt{2}} 4$

e)  $u = \log_3 1$     f)  $v = \log_5 5$     g)  $W = \log_7 (7^3)$     h)  $r = 5^{\log_5 125}$

7. Represente graficamente as funções reais de variável real seguintes:

a)  $f: x \rightarrow \log_2 x$       b)  $g: x \rightarrow 1 + \log_2 x$       c)  $h: x \rightarrow -\log_2 x$   
d)  $i: x \rightarrow -2 - \log_2 x$       e)  $j: x \rightarrow \log_2(x+1)$

8. Esboce, no mesmo referencial, os gráficos de :

$y = \ln x$        $y = |\ln x|$        $y = \ln|x|$

9. Exprima em função de  $\ln 2$ , os números reais:

$x = \ln \sqrt{8}$        $y = \frac{1}{2} \ln 16$        $z = \ln \frac{1}{2}$   
 $t = \ln 36 - 2 \ln 3$

10. Sem utilizar a calculadora, complete com um dos símbolos  $>$ ,  $<$  ou  $=$ :

a)  $\ln 2 + \ln 7 \dots \ln 3 + \ln 6$       b)  $\ln 5 - \ln 3 \dots \ln 11 - \ln 9$   
c)  $\ln 5 \dots \ln 2 + \ln 3$       d)  $-2 \ln 3 \dots -3 \ln 2$   
e)  $\ln 3 \times \ln\left(\frac{e^2}{3}\right) \dots \ln 9 - (\ln 3)^2$       f)  $-\ln 5 \dots \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

11. Simplifique as expressões:

A =  $\ln e + \ln e^2 + \ln e^3$       B =  $\ln e - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$       C =  $\ln(e\sqrt{2})$   
D =  $\ln e^2 - 2 \ln e$       E =  $\ln 3 + \ln(27e) - \ln(9e^3)$

12. Descreva as diferenças entre os gráficos de  $y = \ln(x^2)$  e de  $y = 2 \ln x$

13. Considere a função  $g(x) = 1 + \log_3(2 - 5x)$

15.1) Determine o domínio e os zeros de g.

15.2) Resolva as condições:

a)  $g(x) \leq 3$   
b)  $g(x) > 1$

14. Sejam f e g as funções reais de variável real definidas por:

$f(x) = 3 - \log_2 x$        $g(x) = 4x - 1$

16.1) Caracterize a função fog e determine os seus zeros.

16.2) Determine os valores de x para os quais a função fog é positiva.

15. Um som de nível A decibéis está relacionado com a sua intensidade I pela equação  $A = 10 \log I$  (com  $I > 0$ ), com I expressa nas unidades adequadas.

a) Um som de 1000 unidades quantos decibéis atinge?

b) De um local próximo, os níveis de ruído provocados por um camião e por um avião a jacto, são, respectivamente, 100 e 120 decibéis.

Qual é a razão entre a intensidade de ruído provocado pelo avião a jacto e a do ruído do camião?

16. A magnitude dos tremores de Terra é habitualmente medida na escala de Richter. Nesta escala a magnitude  $M$  de um abalo sísmico está relacionada com a energia libertada  $E$ , em ergs, da seguinte forma  $M = \frac{\log E - 11,8}{1,5}$

- a) Um dos tremores de Terra mais célebre ocorreu em S. Francisco, Estados Unidos da América, em 1906 e libertou  $1,496 \times 10^{24}$  ergs de energia. Qual foi a sua magnitude na escala de Richter?
- b) Qual a energia libertada (em ergs) por um sismo de magnitude 8,5 na escala de Richter?
- c) Exprima a variável  $E$  em função de  $M$ .
- d) Cada acréscimo de uma unidade de magnitude, na escala de Richter, resulta da energia libertada ser multiplicada por um factor. Qual o valor desse factor?

17. Caracterize a função inversa de cada uma das funções injectivas, definidas por:

a)  $f(x) = 2 - e^{x-5}$

b)  $g(x) = \frac{1 - \log_3(1 + 2x)}{4}$

c)  $h(x) = \frac{5}{3} - \ln(2 - 3x)$

18. Resolva as equações:

a)  $\ln(1 - 3x) = -1$

b)  $\ln(x^2 - 4) = \ln(1 - 4x)$

19. A população de uma cidade aumenta 5% por ano.

Supõe-se que no início de 1980 a população era de 100000 habitantes.

- a) Designe por  $P(n)$  o número de habitantes no início do ano  $1979+n$  (com  $n \in \mathbb{N}$ ). Qual o valor de  $P(1)$ ?

Estabeleça uma relação entre  $P(n)$  e  $P(n+1)$  e, em seguida, deduza a expressão de  $P(n)$  em função de  $n$ .

- b) Qual será o número de habitantes da referida cidade no início de 2000?

- c) A partir de que ano será o número de habitantes da cidade superior a 200000?